

Università degli Studi di Torino  
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Matematica



TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

---

# SCHEMI DI HILBERT

---

RELATORE:

Prof.ssa Margherita Roggero

CANDIDATO:

Paolo Lella

A.A. 2007-2008

*La mathématique était devenue pour moi une  
maîtresse toujours accueillante à mon désir.*

Alexandre GROTHENDIECK [**R&S**]

# Introduzione

L'oggetto di studio di questo lavoro è lo *schema di Hilbert*. Per darne una definizione, bisogna introdurre l'idea moderna di famiglia di varietà in geometria algebrica: una famiglia è rappresentata da un morfismo  $f : X \rightarrow Y$ , gli elementi della famiglia sono le controimmagini mediante  $f$  dei punti di  $Y$  e il generico punto  $y \in Y$  ha il ruolo di parametro. Fissato uno spazio proiettivo  $\mathbb{P}^r$ , lo schema di Hilbert, associato al polinomio  $P(z)$ , è uno schema parametro di una famiglia di sottoschemi di  $\mathbb{P}^r$  con polinomio di Hilbert  $P(z)$ . Si tratta di una famiglia speciale, in quanto tra gli elementi della famiglia si trovano tutti i possibili sottoschemi con tale polinomio. La dimostrazione di esistenza dello schema di Hilbert è dovuta al "padre" degli schemi, Grothendieck (dimostrazione presente nei Séminaire Bourbaki dei primi anni '60) e, per esempio, Hartshorne ne ha dimostrato la connessione. Oltre a questo, si conoscono poche altre proprietà generali ed alcune caratterizzazioni approfondite in casi particolari; per questi motivi lo schema di Hilbert è attualmente oggetto di ricerca e questo lavoro ha come obiettivo la presentazione di alcune idee nuove in proposito.

Il Capitolo 1 contiene un riepilogo riguardante le basi di Gröbner, utilizzate poi per dimostrare il noto Teorema delle Szigie di Hilbert. L'impostazione seguita è quella presentata nel libro [CLOb]. Nella seconda parte del capitolo, si espone il risultato più importante per il proseguo: mediante le risoluzioni libere di moduli, si arriva alla dimostrazione che la funzione di Hilbert  $HF(n)$  di un modulo graduato è polinomiale per  $n$  sufficientemente grande.

I Capitoli 2 e 3 sono dedicati all'apprendimento del linguaggio degli schemi. La geometria algebrica classica ha come oggetto di studio varietà e algebre su campi; l'idea introdotta da Grothendieck con gli schemi è di estendersi ad oggetti che comprendano anche gli anelli commutativi con unità. La fonte principale di riferimento per questa parte è il manuale per eccellenza di geometria algebrica, cioè il libro di Hartshorne [Hart]. Nella seconda parte del Capitolo 3 vengono quindi introdotti fasci coerenti e strumenti coomologici, indispensabili per la costruzione dello schema di Hilbert.

Il Capitolo 4 ha come risultato finale la dimostrazione di esistenza dello schema di Hilbert. La dimostrazione presentata in questo lavoro segue quella illustrata da Sernesi nel libro [Sern]; essa richiede una serie di proprietà e lemmi tecnici a cui è dedicato l'intero capitolo. Molto importante è la discussione riguardante la *regolarità di Castelnuovo-Mumford*; dato un polinomio  $P(z)$  il Corollario 4.13 ci fornisce uno strumento per calcolare un limite oltre il quale la funzione di Hilbert di un qualsiasi ideale con polinomio di Hilbert  $P(z)$  è polinomiale. L'altra idea fondamentale, presentata nella dimostrazione del Teorema 4.23 di esistenza e ripresa nel capitolo successivo, è quella di costruire lo schema di Hilbert come chiuso di una opportuna grassmanniana.

Nel Capitolo 5, vengono presentate le idee introdotte da R. Notari e M. L. Spreafico nell'articolo [NS]. Esse si basano sull'impiego delle basi di Gröbner e hanno aperto nuovi scenari in questo campo. Il risultato di partenza è il teorema dimostrato da Macaulay [Mac] che afferma che un qualsiasi ideale omogeneo ha lo stesso polinomio di Hilbert del suo ideale iniziale. Fissato un ideale monomiale  $i_0 \subseteq k[X_0, \dots, X_r]$  con polinomio di Hilbert  $\binom{z+r}{r} - P(z)$  (quindi corrispondente ad un punto di  $\mathcal{Hilb}_{P(z)}^r$ ), si considera l'insieme  $H_{i_0} = \{x \in \mathcal{Hilb}_{P(z)}^r \mid \text{In}(i_x) = i_0\}$ ;  $H_{i_0}$  viene detto *strato* e possiede una naturale struttura di schema molto particolare: riprendendo le idee di Margherita Roggero e Lea Terracini ([RT]), si dimostra che lo strato ha una struttura di schema affine oppure il punto corrispondente all'ideale monomiale è singolare. Per poter utilizzare questa stratificazione nello studio dello schema di Hilbert, è necessario identificare i punti degli strati con i punti di un'opportuna grassmanniana; nella Sottosezione 5.3.1 viene proposto un modo possibile, ottenuto formalizzando la riduzione di  $S$ -polinomi come riduzione per righe di matrici. Nell'ultima parte del lavoro, viene quindi proposto un algoritmo teorico di stratificazione dello schema di Hilbert, che sintetizza le idee e gli strumenti introdotti nei Capitoli 4 e 5.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>ii</b>
<b>1 Basi di Gröbner e polinomio di Hilbert</b>	<b>2</b>
1.1 Introduzione alle basi di Gröbner . . . . .	2
1.1.1 Costruzione della base di Gröbner . . . . .	4
1.2 Moduli . . . . .	9
1.2.1 Basi di Gröbner su $A^p$ . . . . .	11
1.2.2 Calcolo delle sizigie . . . . .	13
1.3 Risoluzione libera di moduli . . . . .	14
1.3.1 Il caso graduato . . . . .	18
1.4 Il polinomio di Hilbert . . . . .	20
1.4.1 Polinomi numerici . . . . .	25
<b>2 Spazi anellati</b>	<b>28</b>
2.1 Lo spettro di un anello . . . . .	28
2.1.1 Esempi non banali . . . . .	31
2.1.2 Ideali radicali . . . . .	34
2.1.3 La topologia di Zariski . . . . .	35
2.2 L'interpretazione geometrica . . . . .	42
2.3 Fasci . . . . .	44
2.3.1 Definizione e proprietà elementari . . . . .	44
2.3.2 Il fascio strutturale su $\text{Spec } A$ . . . . .	47
2.4 Spazi anellati . . . . .	51
<b>3 Schemi</b>	<b>55</b>
3.1 Definizioni . . . . .	55
3.1.1 Schemi proiettivi . . . . .	56
3.1.2 Il prodotto fibrato . . . . .	58
3.2 Fasci coerenti . . . . .	62
3.2.1 Fasci associati a moduli graduati . . . . .	64
3.2.2 Fasci di ideali . . . . .	69

---

Indice

---

3.3	Fibrati proiettivi . . . . .	71
3.4	Coomologia . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Lo schema di Hilbert</b>	<b>75</b>
4.1	Il polinomio di Hilbert di un fascio . . . . .	76
4.2	Morfismi piatti . . . . .	78
4.3	Definizione e costruzione . . . . .	81
4.3.1	Regolarità di Castelnuovo-Mumford . . . . .	82
4.3.2	Flattening stratification . . . . .	91
4.3.3	Il caso delle ipersuperfici . . . . .	94
4.3.4	Grassmanniane . . . . .	96
4.3.5	Esistenza . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Stratificazione dello schema di Hilbert</b>	<b>105</b>
5.1	Strumenti . . . . .	106
5.1.1	Ideale iniziale generico . . . . .	106
5.1.2	Regolarità e saturazione . . . . .	109
5.2	Strati . . . . .	111
5.2.1	Strategia computazionale . . . . .	118
5.3	Prospettive . . . . .	122
5.3.1	La riduzione di matrici . . . . .	122
5.3.2	Un algoritmo per la stratificazione . . . . .	125
5.3.3	La stratificazione dello schema di Hilbert $\mathcal{H}ilb_{z+2}^2$ . . . . .	126
	<b>Bibliografia</b>	<b>136</b>

*Mon approche des mathématiques, depuis l'âge de dix-sept ans quand j'ai commencé à m'y investir à fond, a été de me poser des grandes tâches. C'étaient toujours, dès le début, des tâches de "mise en ordre", de grand nettoyage. Je voyais un apparent chaos, une confusion de choses hétéroclite ou de brumes parfois impondérables, qui visiblement devaient avoir une essence commune et receler un ordre, une harmonie encore cachée qu'il s'agissait de dégager par un travail patient, méticuleux, souvent de longue haleine.*

Alexandre GROTHENDIECK [R&S]

# Capitolo 1

## Basi di Gröbner e polinomio di Hilbert

### 1.1 Introduzione alle basi di Gröbner

L'idea di partenza delle basi di Gröbner è l'estensione al caso dei polinomi in  $n$  variabili della divisione con resto nel dominio euclideo  $k[X]$ . Disporre di un algoritmo di divisione è la base per poter mettere a punto procedure per risolvere importanti problemi come per esempio l'*ideal membership*.

La prima cosa da fare è dare un ordinamento sull'insieme  $\mathbb{T}^n = \{X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}$  dei monomi dell'anello  $k[X_1, \dots, X_n]$ .

**Definizione 1.1.** Un *term order* (o *monomial order*) è una relazione  $\preccurlyeq$  sull'insieme dei monomi  $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$  tale che:

1.  $\preccurlyeq$  è un ordine totale;
2.  $\preccurlyeq$  è compatibile con il prodotto, cioè  $\forall X^\alpha, X^\beta, X^\gamma \in \mathbb{T}^n$

$$X^\alpha \preccurlyeq X^\beta \implies X^\alpha X^\gamma \preccurlyeq X^\beta X^\gamma;$$

3.  $\preccurlyeq$  è un buon ordinamento.

Scrivendo gli esponenti di  $X$  come  $n$ -uple  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  viene fissato in modo naturale un ordinamento sulle variabili:

$$X_1 \succcurlyeq X_2 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq X_{n-1} \succcurlyeq X_n;$$

con questa scelta esistono comunque molteplici term order su  $\mathbb{T}^n$ .



**Definizione 1.2** (Ordinamento Lex). Siano  $X^\alpha$  e  $X^\beta$  due monomi fissati in  $k[X_1, \dots, X_n]$ .  $X^\alpha \geq_{\text{Lex}} X^\beta$  se  $\alpha = \beta$  oppure se  $\alpha_i = \beta_i, \forall i = 1, \dots, r$ , e  $\alpha_{r+1} > \beta_{r+1}$ .

**Definizione 1.3** (Ordinamento DegLex). Siano  $X^\alpha$  e  $X^\beta$  due monomi fissati in  $k[X_1, \dots, X_n]$ .  $X^\alpha \geq_{\text{DegLex}} X^\beta$  se  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$  oppure se  $|\alpha| = |\beta|$  e  $X^\alpha \geq_{\text{Lex}} X^\beta$ .

**Definizione 1.4** (Ordinamento RevLex). Siano  $X^\alpha$  e  $X^\beta$  due monomi fissati in  $k[X_1, \dots, X_n]$ .  $X^\alpha \geq_{\text{RevLex}} X^\beta$  se  $|\alpha| > |\beta|$  oppure se  $|\alpha| = |\beta|$  e  $\alpha = \beta$  o se  $|\alpha| = |\beta|$  e  $\alpha_i = \beta_i, \forall i = r, \dots, n$ , e  $\alpha_{r-1} < \beta_{r-1}$ .

**Esempio 1.5.** Dati i monomi  $X^5Y^3Z^2$  e  $X^3Y^5Z^2$  in  $k[X, Y, Z]$

- $X^5Y^3Z^2 >_{\text{Lex}} X^3Y^5Z^2$ ;
- $X^5Y^3Z^2 >_{\text{DegLex}} X^3Y^5Z^2$ ;
- $X^5Y^3Z^2 >_{\text{RevLex}} X^3Y^5Z^2$ ;

**Definizione 1.6.** Supponiamo ora di aver fissato un term order  $\preccurlyeq$  su  $\mathbb{T}^n$ . Per ogni polinomio  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ , considerata la sua scrittura  $f = \sum_j a_j X^{\alpha_j}$ , definiamo

- il *Leading monomial*  $\text{LM}(f)$  come il monomio massimo  $X^{\alpha_j}$  di  $f$  secondo l'ordinamento  $\preccurlyeq$ ;
- il *Leading coefficient*  $\text{LC}(f)$  come il coefficiente  $a_j$  del leading monomial di  $f$ ;
- il *Leading term*  $\text{LT}(f) = a_j X^{\alpha_j}$  dove  $X^{\alpha_j} = \text{LM}(f)$ .

Passiamo ora a vedere come possono tornare utili queste definizioni lavorando con ideali di un anello di polinomi.

**Definizione 1.7.** Un ideale  $i$  di  $k[X_1, \dots, X_n]$  si dice *monomiale* se soddisfa le seguenti condizioni equivalenti:

1. se  $f \in i$ , allora ogni monomio di  $f$  appartiene ad  $i$ ;
2.  $i$  è generato dall'insieme dei suoi monomi;
3.  $i = (X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_r})$ .

Un insieme minimale di generatori monomiali si dice *base* di  $i$ .

È immediato dimostrare la seguente proprietà

**Proposizione 1.1.** *Un ideale monomiale  $i$  ha un'unica base.*

*Dimostrazione.* Partendo dall'insieme di tutti i monomi appartenenti ad  $\mathfrak{i}$  possiamo estrarre un insieme minimale di generatori cancellando tutti i monomi divisibili per qualche altro monomio. Supponiamo quindi di avere due sistemi minimali  $\{X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_r}\}$  e  $\{X^{\beta_1}, \dots, X^{\beta_s}\}$ . Ogni elemento  $X^{\alpha_i}$  della prima base dovrebbe dividere un elemento  $X^{\beta_j}$  della seconda che a sua volta dovrebbe dividere un elemento  $X^{\alpha_k}$ , cioè  $X^{\alpha_i}$  dividerebbe  $X^{\alpha_k}$ , ma per costruzione l'unica possibilità è  $X^{\alpha_i} = X^{\alpha_k}$  ed infine  $X^{\alpha_i} = X^{\beta_j}$ . ■

**Definizione 1.8.** Sia  $\mathfrak{i}$  un ideale di  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Si definisce *ideale iniziale* di  $\mathfrak{i}$  (rispetto al term order  $\preccurlyeq$  fissato) l'ideale monomiale

$$\text{In}(\mathfrak{i}) = (\{X^\alpha \mid X^\alpha = \text{LM}(f), \text{ per un qualche } f \in \mathfrak{i}\}).$$

**Definizione 1.9.** Sia  $\mathfrak{i}$  un ideale di  $k[X_1, \dots, X_n]$  e sia fissato un term order. Si definisce *base di Gröbner* o *G-base* un insieme di polinomi  $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq \mathfrak{i}$  tali che  $\text{In}(\mathfrak{i}) = (\text{LM}(f_1), \dots, \text{LM}(f_r))$ .

Una base di Gröbner si dice *ridotta* se per ogni  $i$ ,  $\text{LC}(f_i) = 1$  e per ogni  $j \neq i$ ,  $\text{LT}(f_i)$  non divide alcun monomio di  $f_j$ .

A questo punto vorremmo che questo insieme di elementi dell'ideale  $\mathfrak{i}$  rappresentasse un insieme di generatori dell'ideale. Questo ci è garantito dalla seguente

**Proposizione 1.2.** Sia  $\mathfrak{i}$  un ideale di  $k[X_1, \dots, X_n]$  e sia  $\{X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_r}\}$  un insieme di generatori monomiali di  $\text{In}(\mathfrak{i})$ . Consideriamo  $\forall i = 1, \dots, r$  un polinomio  $f_i \in \mathfrak{i}$ , tale che  $X^{\alpha_i} = \text{LM}(f_i)$ , allora

$$\mathfrak{i} = (f_1, \dots, f_r).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esistono nell'ideale  $\mathfrak{i}$  degli elementi che non si possono esprimere come combinazioni lineari degli  $f_i$ . Tra questi scegliamo un elemento  $f$  con leading monomial minimo rispetto al term order fissato. Chiamato  $X^\beta$  il leading monomial di  $f$ , dal fatto che  $X^\beta \in \text{In}(\mathfrak{i})$ , sappiamo che esiste  $X^{\alpha_j}$  tra i generatori dell'ideale iniziale che divide  $X^\beta$ : cioè esiste  $X^\gamma$  tale che  $X^\beta = X^\gamma \cdot X^{\alpha_j}$ . Consideriamo ora il polinomio

$$g = f - \frac{\text{LC}(f)}{\text{LC}(f_j)} X^\gamma f_j;$$

$g$  appartiene ad  $\mathfrak{i}$  ma non si può scrivere come combinazione degli  $f_i$ , inoltre ha leading monomial minore di  $\text{LM}(f)$ , contro le ipotesi considerate su  $f$ . ■

### 1.1.1 Costruzione della base di Gröbner

Vediamo ora come è possibile estendere al caso  $k[X_1, \dots, X_n]$  l'algoritmo di divisione dei polinomi. Sia  $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_r\} \subset k[X_1, \dots, X_n]$  un insieme di

polinomi e sia  $i = (\mathcal{B})$ . Consideriamo ora un polinomio  $g$  e la sua scrittura ordinata  $g = \sum_{j=1}^s c_j X^{\alpha_j}$ , con  $c_j \neq 0$  e  $X^{\alpha_j} > X^{\alpha_{j-1}}$ . Cerchiamo ora un monomio di  $g$  divisibile per un qualche  $\text{LM}(f_i)$ : se non ne troviamo si dice che  $g$  non è riducibile rispetto a  $\mathcal{B}$ . In caso contrario consideriamo  $X^{\alpha_j}$ , massimo monomio divisibile per i leading monomial di  $\mathcal{B}$ : esistono  $f_i$  ed  $X^\beta$  tali che  $X^{\alpha_j} = X^\beta \cdot \text{LM}(f_i)$ . Consideriamo ora il polinomio

$$g_1 = g - \frac{c_j X^\beta}{\text{LC}(f_i)} f_i;$$

questo passo della riduzione si indica di solito con  $g \xrightarrow{\mathcal{B}} g_1$ . Ripetendo il procedimento a partire da  $g_1$  possiamo continuare la riduzione fino ad ottenere un polinomio  $g'$  non ulteriormente riducibile su  $\mathcal{B}$ . Il procedimento termina perché ad ogni passo “cancelliamo” il monomio massimo divisibile per i leading monomial, quindi la successione dei  $g_k$  è decrescente e finita, grazie alle proprietà di buon ordinamento. La riduzione completa di  $g$  sugli elementi di  $\mathcal{B}$  si indica con  $g \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ g'$ .

**Esempio 1.10.** In generale questo procedimento di riduzione, non garantisce l'unicità della riduzione come si vede in questo esempio: consideriamo l'ordinamento DegLex e il polinomio  $g = 2X^3Y^3 + 4Y^2 \in k[X, Y]$  e cerchiamo di ridurlo sull'insieme di polinomi  $\mathcal{B} = \{f_1 = 2xy^2 + 4y^2 + 3x, f_2 = y^2 - 2y - 2\}$ . Il problema che non garantisce l'unicità della riduzione sorge quando più di uno dei leading monomial degli elementi di  $\mathcal{B}$  divide il monomio di  $g$  massimo. Procediamo a due differenti riduzioni, nella prima scegliamo sempre di ridurre (se possibile) sul polinomio  $f_1$ , nella seconda sul polinomio  $f_2$ .

PRIMA RIDUZIONE

Step 1	$x^3y^3 = x^2y \cdot \text{LM}(f_1), \quad g_1 = g - \frac{2x^2y}{2}f_1$ $g = g_1 + x^2yf_1$ $g_1 = -4x^2y^3 - 3x^3y + 4y^2$
Step 2	$x^2y^3 = xy \cdot \text{LM}(f_1), \quad g_2 = g_1 + \frac{4xy}{2}f_1$ $g = g_2 + (x^2y - 2xy)f_1$ $g_2 = -3x^3y + 8xy^3 + 3x^2y + 4y^2$
Step 3	$xy^3 = y \cdot \text{LM}(f_1), \quad g_3 = g_2 - \frac{8y}{2}f_1$ $g = g_3 + (x^2y - 2xy + 4y)f_1$ $g_3 = -3x^3y + 3x^2y - 16y^3 - 12xy + 4y^2$
Step 4	$y^3 = y \cdot \text{LM}(f_2), \quad g_4 = g_3 + 16yf_2$ $g = g_4 + (x^2y - 2xy + 4y)f_1 - 16yf_2$ $g_4 = -3x^3y + 3x^2y - 12xy - 28y^2 - 32$
Step 5	$y^2 = 1 \cdot \text{LM}(f_2), \quad g_4 = g_3 + 28f_2$ $g = g_5 + (x^2y - 2xy + 4y)f_1 - (16y + 28)f_2$ $g_5 = -3x^3y + 3x^2y - 12xy - 56y - 88$

SECONDA RIDUZIONE

Step 1	$x^3y^3 = x^3y \cdot \text{LM}(f_2), \quad g_1 = g - 2x^3yf_2$ $g = g_1 + 2x^3yf_2$ $g_1 = 4x^3y^2 + 4x^3y + 4y^2$
Step 2	$x^3y^2 = x^3 \cdot \text{LM}(f_2), \quad g_2 = g_1 - 4x^3f_2$ $g = g_2 + (x2x^3y + 4x^3)f_2$ $g_2 = -3x^3y + 8xy^3 + 3x^2y + 4y^2$
Step 3	$y^2 = 1 \cdot \text{LM}(f_2), \quad g_3 = g_2 - 4f_2$ $g = g_3 + (12x^3y + 4x^3 + 4)f_2$ $g_3 = 2x^3y + 8x^3 + 8y + 8$

Abbiamo quindi ottenuto

$$g = (x^2y - 2xy + 4y)f_1 - (16y + 28)f_2 - 3x^3y + 3x^2y - 12xy - 56y - 88$$

$$g = (2x^3y + 4x^3 + 4)f_2 + 12x^3y + 8x^3 + 8y + 8$$

Ques'arbitrarietà sembrerebbe compromettere l'uso della riduzione al fine di capire quando un polinomio appartiene ad un ideale, ma questo inconveniente scompare se come insieme  $\mathcal{B}$  consideriamo una base di Gröbner.

**Teorema 1.3.** *Sia  $\preceq$  un term order e  $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_r\}$  un sottoinsieme finito di elementi di un ideale  $\mathfrak{i}$  di  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1.  $\mathcal{B}$  è una base di Gröbner;

2.  $\forall g \neq 0 \in \mathfrak{i}$ , esiste  $f_i \in \mathcal{B}$  tale che  $\text{LM}(f_i)$  divide  $\text{LM}(g)$ ;

3.  $\forall g \neq 0 \in \mathfrak{i}$ ,  $g \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ 0$ ;

4.  $\forall g \neq 0 \in \mathfrak{i}$ ,  $g = \sum_{j=1}^r h_j f_j$  e  $\text{LM}(g) = \max_j \{\text{LM}(h_j f_j)\}$ .

*Dimostrazione.* (1.  $\Rightarrow$  2.) È conseguenza diretta della definizione di base di Gröbner, infatti

$$\text{LM}(g) \in \text{In}(\mathfrak{i}) = (\text{LM}(f_1), \dots, \text{LM}(f_r)).$$

(2.  $\Rightarrow$  3.) Dalla 2 possiamo dedurre che ogni elemento  $g \neq 0 \in \mathfrak{i}$  può essere ridotto su  $\mathcal{B}$ . La catena di riduzioni  $g \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ g'$  è finita quindi esiste  $g'$  non ulteriormente riducibile, ma  $g' = g - \sum h_j f_j$ , quindi  $g' \in \mathfrak{i} \Rightarrow g' = 0$ .

(3.  $\Rightarrow$  4.) Applicando la riduzione a  $g$ , si ottiene

$$g = \sum_j^s h_j f_j,$$

dove al crescere di  $j$  i monomi  $\text{LM}(h_j f_j)$  sono strettamente decrescenti, cioè  $\text{LM}(g) = \text{LM}(h_1 f_1) = \max_i (\text{LM}(h_i f_i))$ . Ponendo  $h_j = 0$  se  $f_j$  non compare nella riduzione di  $g$  e riordinando i termini si ottiene

$$\text{LM}(g) = \max_j (\text{LM}(h_j f_j)).$$

(4.  $\Rightarrow$  1.) Per la 4, innanzitutto gli elementi di  $\mathcal{B}$  generano l'ideale  $\mathfrak{i}$ , inoltre consideriamo un polinomio  $g$  e l'indice  $i$  tale per cui  $\text{LM}(g) = \text{LM}(h_i f_i)$ : si ricava  $\text{LM}(g) = \text{LM}(h_i) \text{LM}(f_i)$ , cioè  $\text{LM}(f_i)$  divide  $\text{LM}(g)$ , quindi

$$(\text{LM}(f_1), \dots, \text{LM}(f_r)) = \text{In}(\mathfrak{i}). \quad \blacksquare$$

**Corollario 1.4.** Sia  $\preceq$  un term order fissato e sia  $\mathfrak{i}$  un ideale di  $k[X_1, \dots, X_n]$  con una sua base di Gröbner  $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_r\}$ . Allora per ogni polinomio  $g \in k[X_1, \dots, X_n]$  esiste un unico polinomio  $g'$  non riducibile su  $\mathcal{B}$  tale che  $g \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ g'$ .  $g'$  viene detto resto o forma normale di  $g$  modulo  $\mathcal{B}$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo che per  $g \in k[X_1, \dots, X_n]$  esistano due polinomi  $g'$  e  $h'$  tali che

$$g \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ g' \quad \text{e} \quad g \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ h'.$$

Allora  $g' = g - \sum g_j f_j$  e  $h' = g - \sum h_i f_i$  da cui si deduce

$$g' - h' = \sum h_i f_i - \sum g_j f_j \in \mathfrak{i}.$$

Per il teorema 1.3,  $g' - h' \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ 0$ , ma dal momento che  $g'$  e  $h'$  non sono riducibili su  $\mathcal{B}$ , anche  $g' - h'$  non è riducibile quindi  $g' - h' = 0$ .  $\blacksquare$

A questo punto non resta che capire come è possibile costruire una  $G$ -base. Cominciamo con la seguente

**Definizione 1.11.** Sia  $\preccurlyeq$  un term order su  $k[X_1, \dots, X_n]$  e siano  $g_1, g_2$  due polinomi in  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Si dice  $S$ -polinomio di  $g_1$  e  $g_2$  la seguente combinazione lineare

$$S(g_1, g_2) = \frac{\text{mcm}(\text{LM}(g_1), \text{LM}(g_2))}{\text{LT}(g_1)} g_1 - \frac{\text{mcm}(\text{LM}(g_1), \text{LM}(g_2))}{\text{LT}(g_2)} g_2. \quad (1.1)$$

**Teorema 1.5** (Criterio di Buchberger). *Fissato un term order  $\preccurlyeq$  su  $k[X_1, \dots, X_n]$ , si considerino un ideale  $i$  di  $k[X_1, \dots, X_n]$  e un sistema di generatori  $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_r\}$  di  $i$ .  $\mathcal{B}$  è una base di Gröbner di  $i$  se e solo se per ogni coppia di elementi  $f_i, f_j \in \mathcal{B}$ ,  $i \neq j$ , vale  $S(f_i, f_j) \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ 0$ .*

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Per ogni  $i, j$ ,  $S(f_i, f_j)$  appartiene all'ideale  $i$ , quindi per il teorema 1.3,  $S(f_i, f_j) \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Dal momento che il processo di riduzione è finito, è sufficiente dimostrare che per ogni polinomio  $f$  di  $i$  è possibile effettuare un primo passo di riduzione.  $f$  si può scrivere come combinazione  $\sum h_i g_i$  in modo non unico; tra i vari modi possibili scegliamo la combinazione in cui il monomio  $X^\alpha = \max_i \{\text{LM}(h_i f_i)\}$  compare il minor numero di volte possibile.  $X^\alpha$  compare una sola volta. Supponiamo che compaia più di una volta, per comodità  $X^\alpha = \text{LM}(h_1 f_1) = \text{LM}(h_2 f_2)$ ;  $X^\alpha$  è quindi multiplo di  $\text{mcm}(\text{LM}(f_1), \text{LM}(f_2))$ :

$$\begin{aligned} X^\alpha &= \text{LM}(h_1 f_1) = M_1 \cdot \text{mcm}(\text{LM}(f_1), \text{LM}(f_2)) \\ \implies \text{LM}(h_1) &= M_1 \frac{\text{mcm}(\text{LM}(f_1), \text{LM}(f_2))}{\text{LT}(f_1)}. \\ X^\alpha &= \text{LM}(h_2 f_2) = M_2 \cdot \text{mcm}(\text{LM}(f_1), \text{LM}(f_2)) \\ \implies \text{LM}(h_2) &= M_2 \frac{\text{mcm}(\text{LM}(f_1), \text{LM}(f_2))}{\text{LT}(f_2)}. \end{aligned}$$

Dal momento che  $S(f_1, f_2) \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ 0$  possiamo scrivere

$$\frac{\text{mcm}(\text{LM}(f_1), \text{LM}(f_2))}{\text{LT}(f_1)} f_1 = \frac{\text{mcm}(\text{LM}(f_1), \text{LM}(f_2))}{\text{LT}(f_2)} f_2 + \sum c_j f_j,$$

moltiplicando per un  $M$  opportuno

$$\text{LM}(h_1) f_1 = M (\text{LM}(h_2) f_2 + \sum c_j f_j).$$

Sostituendo nella scrittura di  $f$  scelta al posto di  $\text{LM}(h_1) f_1$ , l'espressione sopra troviamo una scrittura in cui il monomio  $X^\alpha$  compare un minor numero di volte in contrasto con l'ipotesi considerata (in quanto  $\sum c_j f_j$  è la riduzione di  $S(f_1, f_2)$  e quindi ogni monomio di  $M \sum c_j f_j$  è minore di  $X^\alpha$ ).

Se  $X^\alpha$  compare una sola volta, allora  $X^\alpha = \text{LM}(f)$ , quindi esiste  $s$  tale che  $\text{LM}(f) = \text{LM}(h_s)\text{LM}(f_s)$  e quindi possiamo ridurre  $f$ ,

$$f \xrightarrow{\mathcal{B}} f - \text{LT}(h_s)f_s. \quad \blacksquare$$

**Algoritmo di Buchberger.** Sia un ideale  $\mathfrak{i} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  e un suo sistema di generatori  $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_r\}$ . Per calcolare una  $G$ -base a partire da  $\mathcal{B}$ , si ordinano le coppie  $(f_i, f_j)$  e per ogni coppia si calcola  $S(f_i, f_j)$  ed una sua riduzione  $S(f_i, f_j) \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ h_{ij}$ : se  $h_{ij} = 0$  si passa alla coppia successiva, altrimenti si considera il nuovo sistema di generatori  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cup \{h_{ij}\}$ . L'algoritmo termina in quanto gli ideali iniziali, corrispondenti agli insiemi  $\mathcal{B}_i$ , formano una catena ascendente di ideali che per noetherianità si stabilizza.

## 1.2 Moduli

Cercheremo ora di estendere questi metodi al caso più generale dei moduli. In questa sezione  $A$  indicherà sempre l'anello dei polinomi in  $n$  variabili  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Ci limiteremo a considerare moduli del tipo

$$M \subseteq A^p = \underbrace{A \oplus A \oplus \dots \oplus A}_{p \text{ volte}}.$$

Come per gli spazi vettoriali, gli elementi di un sottoinsieme  $F = \{f_1, \dots, f_r\}$  di  $M$  si dicono linearmente indipendenti se l'unica combinazione lineare

$$c_1f_1 + \dots + c_rf_r = 0, \quad c_i \in A, \quad f_i \in M$$

a tutti i coefficienti nulli:  $c_1 = \dots = c_r = 0$ . Un sistema di elementi linearmente indipendenti che generano tutto il modulo si dice *base*, ma a differenza degli spazi vettoriali su campi, non tutti i moduli hanno una base. Quando consideriamo quindi un  $A$ -modulo  $M \subseteq A^p$ , possiamo descrivere gli elementi come vettori colonna e nel caso in cui esista una base  $F = \{f_1, \dots, f_r\}$  ogni elemento di  $M$  può scrivere in modo unico come combinazione lineare

$$f = c_1f_1 + \dots + c_rf_r, \quad c_i \in A, \quad f_i \in F.$$

**Definizione 1.12.** Sia  $M$  un  $A$ -modulo.  $M$  si dice *modulo libero* se possiede una base.

Il caso più semplice da considerare è  $M = A^p$ , infatti una sua base è formata dagli elementi

$$e_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = {}^t(0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_p = {}^t(0, \dots, 0, 1).$$

In modo naturale si può dimostrare che gli omomorfismi tra due moduli  $A^p$  e  $A^m$  possono essere rappresentati come matrici  $m \times p$  a coefficienti in  $A$  e viceversa.

Introduciamo ora il concetto di sizigia.

**Proposizione-Definizione 1.6.** Sia  $M$  un  $A$ -modulo e sia  $(f_1, \dots, f_r)$  una  $r$ -upla di elementi di  $M$ . L'insieme di tutti gli elementi  ${}^t(c_1, \dots, c_r)$  di  $A^r$  tali che

$$c_1 f_1 + \dots + c_r f_r = 0$$

formano un sottomodulo di  $A^r$ , chiamato primo modulo di sizigie di  $(f_1, \dots, f_r)$  e denotato con  $\text{Syz}(f_1, \dots, f_r)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo due elementi  ${}^t(a_1, \dots, a_r)$  e  ${}^t(b_1, \dots, b_r)$  tali che

$$a_1 f_1 + \dots + a_r f_r = 0,$$

$$b_1 f_1 + \dots + b_r f_r = 0;$$

sommando le due equazioni

$$(a_1 + b_1) f_1 + \dots + (a_r + b_r) f_r = 0,$$

quindi  ${}^t(a_1 + b_1, \dots, a_r + b_r)$  appartiene a  $\text{Syz}(f_1, \dots, f_r)$ . Preso ora un elemento  $c \in A$ ,

$$c(a_1 f_1 + \dots + a_r f_r) = ca_1 f_1 + \dots + ca_r f_r = 0,$$

quindi  ${}^t(ca_1, \dots, ca_r) \in \text{Syz}(f_1, \dots, f_r)$ . ■

Pensando agli elementi di  $A^r$  come vettori colonna possiamo rappresentare una collezione di sizigie come colonne di una matrice. Se consideriamo come  $r$ -upla di  $M$  un sistema di generatori, si definisce *matrice presentazione* di  $M$  una matrice con  $r$  righe, le cui colonne sono sizigie che generano  $\text{Syz}(f_1, \dots, f_r)$ .

**Esempio 1.13.** Come esempio consideriamo  $A = k[X, Y, Z]$  e il suo ideale  $\mathfrak{i} = (X^2 - YZ, XY - Z^2)$ . Calcoliamo con `Macaulay2` una sua base di Gröbner e quindi la matrice presentazione.

```
i1 : A = QQ[X, Y, Z];
i2 : I = ideal(X^2 - Y*Z, X*Y - Z^2)

          2          2
o2 = ideal (X  - Y*Z, X*Y - Z )
o2 : Ideal of A
i3 : B = gens gb I
o3 = | XY-Z2 X2-YZ Y2Z-XZ2 |
      1          3
```



```

o3 : Matrix A <--- A
i4 : SyzB = syz B
o4 = {2} | X  YZ  |
      {2} | -Y -Z2 |
      {3} | -1 -X  |
           3      2
o4 : Matrix A <--- A

```

Quindi le sizigie generatrici di  $\text{Syz}(XY - Z^2, X^2 - YZ, Y^2Z - XZ^2)$  sono:

$$\begin{aligned}
 {}^t(X, -Y, -1), & \quad X(XY - Z^2) - Y(X^2 - YZ) - 1(Y^2Z - XZ^2) = 0 \\
 {}^t(YZ, -Z^2, -X), & \quad YZ(XY - Z^2) - Z^2(X^2 - YZ) - X(Y^2Z - XZ^2) = 0.
 \end{aligned}$$

### 1.2.1 Basi di Gröbner su $A^p$

Per estendere le tecniche illustrate nella sezione 1.1 dobbiamo innanzitutto estendere un ordinamento monomiale ad  $A^p$ . Un monomio  $m$  di  $A^p$  è un elemento del tipo  $X^\alpha e_i$  per un qualche  $i$ , quindi ogni elemento  $f \in A^p$  si può scrivere come

$$f = \sum_{i=1}^s c_i m_i, \quad c_i \in k.$$

Per esempio su  $k[X, Y, Z]^2$

$$\begin{aligned}
 f &= \begin{pmatrix} 5XY^4 - 3XZ \\ X^3 + Y^2 - 4 \end{pmatrix} = \\
 &= 5 \begin{pmatrix} XY^4 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} XZ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ X^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y^2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= 5XY^4 e_1 - 3XZ e_1 + X^3 e_2 + Y^2 e_2 - 4e_2.
 \end{aligned}$$

La definizione di ordine monomiale è analoga alla definizione data per l'anello dei polinomi; vogliamo che la relazione  $\preceq$  sia un ordine totale, compatibile con il prodotto per elementi di  $A$  e un buon ordinamento. Partendo dalla convenzione che

$$e_1 \succ e_2 \succ \dots \succ e_m$$

definiamo i seguenti ordinamenti

**Definizione 1.14** (Ordinamento TOP = Term Over Position). Sia  $\preceq$  un term order su  $A$ . L'estensione TOP di  $\preceq$  è tale che  $X^\alpha e_i \succ_{\text{TOP}} X^\beta e_j$  se  $X^\alpha \succ X^\beta$  oppure se  $X^\alpha = X^\beta$  e  $i < j$ .

**Definizione 1.15** (Ordinamento POT = Position Over Term). Sia  $\preceq$  un term order su  $A$ . L'estensione POT di  $\preceq$  è tale che  $X^\alpha e_i \succ_{\text{TOP}} X^\beta e_j$  se  $i < j$  oppure se  $i = j$  e  $X^\alpha \succ X^\beta$ .

Considerato quindi un ordinamento  $\preceq$  fissato, possiamo scrivere ogni elemento di  $A^p$  come sommatoria

$$f = \sum_{i=1}^s c_i m_i$$

tale che  $m_1 \succ m_2 \succ \dots \succ m_s$  e definire *leading monomial*, *leading term* e *leading coefficient* in modo naturale

$$\text{LM}(f) = m_1, \quad \text{LT}(f) = c_1 m_1, \quad \text{LC}(f) = c_1.$$

A questo punto possiamo definire l'algoritmo di divisione. Innanzitutto dati due monomi  $X^\alpha e_i$  e  $X^\beta e_j$ , si dice che  $X^\beta e_j$  è divisibile per  $X^\alpha e_i$  se  $i = j$  e se  $X^\alpha$  divide  $X^\beta$ . Sia ora  $F = \{f_1, \dots, f_r\}$  un insieme di elementi di  $A^p$  e sia  $g$  un elemento in  $A^p$ . Si cerca in  $F$  un elemento  $f_i$  tale che il suo leading term divida il leading term di  $g$ , cioè tale che esista  $q \in A$  per cui  $\text{LT}(g) = q \text{LT}(f_i)$ ; se non lo si trova,  $g$  non è riducibile su  $F$ , altrimenti si ripete questo procedimento sul polinomio

$$g_1 = g - q f_i.$$

La dimostrazione che l'algoritmo termina è identica alla dimostrazione della terminazione nel caso degli ideali. Non resta che riprendere le definizioni e i teoremi della sezione 1.1 e generalizzarle al caso dei moduli.

**Definizione 1.16.** Sia  $M$  un sottomodulo di  $A^p$  e sia  $\preceq$  un ordine monomiale fissato. Si dice *modulo iniziale* di  $M$ , il sottomodulo

$$\text{In}(M) = \{\text{LM}(f) \mid f \in M\}.$$

Un insieme  $G = \{f_1, \dots, f_r\} \subset M$  si dice *base di Gröbner* di  $M$  se

$$\text{In}(M) = (\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_r)).$$

**Proposizione 1.7.** Sia  $G = \{f_1, \dots, f_r\}$ , una base di Gröbner per il modulo  $M \subseteq A^p$ .

- $\forall g \in A^p$ , il resto della riduzione di  $g$  su  $G$  è unico e se  $g \in M$  vale 0;
- gli elementi di  $G$  generano il modulo  $M$ :

$$M = (f_1, \dots, f_r).$$

**Definizione 1.17.** Sia  $\preceq$  un ordine monomiale su  $A^p$  e siano  $g_1, g_2 \in A^p$ . Si dice *S-vettore* di  $g_1$  e  $g_2$  la seguente combinazione lineare

$$S(g_1, g_2) = \frac{\text{mcm}(\text{LT}(g_1), \text{LT}(g_2))}{\text{LT}(g_1)} g_1 - \frac{\text{mcm}(\text{LT}(g_1), \text{LT}(g_2))}{\text{LT}(g_2)} g_2. \quad (1.2)$$

**Teorema 1.8** (Criterio di Buchberger per i moduli). *Si considerino un ordine monomiale  $\preceq$  su  $A^p$ , un sottomodulo  $M \subseteq A^p$  e un sistema di generatori  $\mathcal{G} = \{f_1, \dots, f_r\}$  di  $M$ .  $\mathcal{G}$  è una base di Gröbner di  $M$  se e solo se per ogni coppia di elementi  $f_i, f_j \in \mathcal{G}, i \neq j$ , vale  $S(f_i, f_j) \xrightarrow{\mathcal{G}}_+ 0$ .*

**Algoritmo di Buchberger** (per i moduli). Sia  $M \subseteq A^p$  un modulo e  $\mathcal{G} = \{f_1, \dots, f_r\}$  un suo insieme di generatori. Per calcolare una base di Gröbner a partire da  $\mathcal{G}$ , si ordinano le coppie  $(f_i, f_j)$  e per ogni coppia si calcola  $S(f_i, f_j)$  ed una sua riduzione  $S(f_i, f_j) \xrightarrow{\mathcal{G}}_+ h_{ij}$ : se  $h_{ij} = 0$  si passa alla coppia successiva, altrimenti si considera il nuovo sistema di generatori  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \cup \{h_{ij}\}$ . L'algoritmo termina in quanto i sottomoduli iniziali, corrispondenti agli insiemi  $\mathcal{B}_i$ , formano una catena ascendente di moduli che per noetherianità si stabilizza.

**Esempio 1.18.**

```
i1 : A = QQ[X, Y, Z];
i2 : M = matrix{{X^2 - Y*Z, X+Z}, {X*Z-Y^2, Y+Z}}
o2 = | X2-YZ  X+Z |
      | -Y2+XZ  Y+Z |
           2      2
o2 : Matrix A <--- A
i3 : G = gens gb M
o3 = | X+Z  YZ-Z2      |
      | Y+Z  XY+Y2-YZ-Z2 |
           2      2
o3 : Matrix A <--- A
```

### 1.2.2 Calcolo delle sizigie

Vedremo ora come è possibile utilizzare gli strumenti per costruire basi di Gröbner per determinare le sizigie di un ideale e più in generale di un modulo. Consideriamo un term order  $\preceq$ , un ideale  $i \subset A$  e una sua base di Gröbner  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_r\}$ . Sappiamo quindi che  $\text{Syz}(g_1, \dots, g_r)$  è un sottomodulo di  $A^r$ . Per ogni coppia di elementi  $g_i, g_j \in \mathcal{G}$ , si ha che il resto della riduzione del polinomio  $S(g_i, g_j)$  è 0, cioè

$$S(g_i, g_j) = \sum_{k=1}^r a_k^{ij} g_k,$$

con  $a_k^{ij} \in A$  e  $\text{LT}(a_k^{ij} g_k) \preceq \text{LT}(S(g_i, g_j))$  per ogni  $k$ . Denotiamo con  $a_{ij}$  l'elemento  $\sum_{k=0}^r a_k^{ij} e_k$  in  $A^r$  e definiamo

$$s_{ij} = \frac{X^\gamma}{\text{LT}(g_i)} e_i - \frac{X^\gamma}{\text{LT}(g_j)} e_j - a_{ij}. \tag{1.3}$$

dove  $X^\gamma = \text{mcm}(\text{LM}(g_i), \text{LM}(g_j))$ . Scritto come vettore risulta

$$\mathbf{s}_{ij} = {}^t \left( -a_1^{ij}, \dots, \frac{X^\gamma}{\text{LT}(g_i)} - a_i^{ij}, \dots, -\frac{X^\gamma}{\text{LT}(g_j)} - a_j^{ij}, \dots, -a_r^{ij} \right)$$

e  $\mathbf{s}_{ij}$  rappresenta una sizigia infatti

$$\left( -a_1^{ij}, \dots, \frac{X^\gamma}{\text{LT}(g_i)} - a_i^{ij}, \dots, -\frac{X^\gamma}{\text{LT}(g_j)} - a_j^{ij}, \dots, -a_r^{ij} \right) \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ g_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{X^\gamma}{\text{LT}(g_i)} g_i - \frac{X^\gamma}{\text{LT}(g_j)} g_j - \sum_{k=0}^r a_k^{ij} g_k = S(g_i, g_j) - \sum_{k=0}^r a_k^{ij} g_k = 0.$$

Nel caso dei moduli, consideriamo un ordine monomiale  $\preceq$  fissato, il modulo  $M \subset A^p$  e una sua base di Gröbner  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ . Per ogni coppia  $(g_i, g_j)$  abbiamo che

$$S(g_i, g_j) = \sum_{k=1}^s a_k^{ij} g_k$$

dove  $a_k^{ij}$  appartiene ad  $A$  e  $\text{LT}(a_k^{ij} g_k) \preceq \text{LT}(S(g_i, g_j))$  per ogni  $k$ . Definiamo

$$\mathbf{a}_{ij} = a_1^{ij} \mathbf{e}_1 + \dots + a_s^{ij} \mathbf{e}_s \in A^s;$$

chiamato  $\mathbf{m}_{ij}$  il minimo comune multiplo tra  $\text{LT}(g_i)$  e  $\text{LT}(g_j)$ , per ogni coppia di indici  $i, j$ , è definito l'elemento

$$\mathbf{s}_{ij} = \frac{\mathbf{m}_{ij}}{\text{LT}(g_i)} \mathbf{e}_i - \frac{\mathbf{m}_{ij}}{\text{LT}(g_j)} \mathbf{e}_j - \mathbf{a}_{ij} \quad (1.4)$$

in  $\text{Syz}(g_1, \dots, g_s)$ .

Vale il seguente importante risultato

**Teorema 1.9** (Teorema di Schreyer). *Fissato l'ordinamento monomiale  $\preceq$ , sia  $M \subseteq A^p$  un modulo e sia  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_r\}$  una sua base di Gröbner. Le sizigie  $\mathbf{s}_{ij}$ , definite in (1.4), formano una base di Gröbner del sottomodulo  $\text{Syz}(g_1, \dots, g_r) \subseteq A^r$  secondo l'ordinamento monomiale  $\preceq_{\mathcal{G}}$  definito nel modo seguente*

$$\begin{aligned} X^\alpha \mathbf{e}_i \preceq_{\mathcal{G}} X^\beta \mathbf{e}_j & \text{ se } \text{LT}(X^\alpha g_i) \preceq \text{LT}(X^\beta g_j) \text{ in } A^p \text{ oppure} \\ & \text{ se } \text{LT}(X^\alpha g_i) = \text{LT}(X^\beta g_j) \text{ e } i > j. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Per una dimostrazione, si veda [CLOb, Ch. 5, Th. 3.3]. ■

### 1.3 Risoluzione libera di moduli

**Proposizione 1.10.** *Sia  $M$  un  $A$ -modulo. Scegliere  $r$  elementi in  $M$  è equivalente a fissare un omomorfismo di  $A$ -moduli  $\varphi : A^r \rightarrow M$ . Gli  $r$  elementi scelti sono un sistema di generatori se e solo se  $\varphi$  è un omomorfismo suriettivo.*

*Dimostrazione.* Siano  $\{f_1, \dots, f_r\}$   $r$  elementi di  $M$ . Possiamo definire l'omomorfismo  $\varphi$

$$\varphi(e_i) = f_i.$$

Viceversa preso un omomorfismo  $\varphi : A^r \rightarrow M$ , fisso gli  $r$  elementi  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)\}$ .

Il sottomodulo immagine è  $\text{im } \varphi = (\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_r) = f_r)$ , quindi se  $\{f_1, \dots, f_r\}$  sono generatori  $\text{im}(\varphi) = M$ . Viceversa se  $\varphi$  è suriettiva,  $M = \text{im } \varphi = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r))$ , pertanto  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)\}$  è un insieme di generatori. ■

Consideriamo quindi un modulo  $M$  con un sistema di generatori  $\{f_1, \dots, f_r\}$  e il morfismo  $\varphi$  definito da esso. L'immagine di un qualsiasi elemento in  $A^r$  è

$$\varphi(g_1, \dots, g_r) = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r = \sum_{i=1}^r g_i f_i,$$

pertanto è immediato osservare che  $\ker \varphi = \text{Syz}(f_1, \dots, f_r)$ . Se consideriamo una *presentazione* del modulo  $M$ , abbiamo fissati anche un insieme di generatori  $\{h_1, \dots, h_s\}$  di  $\text{Syz}(f_1, \dots, f_r)$ , cioè per la proposizione 1.10, un morfismo  $\psi : A^s \rightarrow \text{Syz}(f_1, \dots, f_r) \subseteq A^r$  suriettivo. Dal momento che  $\text{im } \psi = \ker \varphi$  abbiamo la successione esatta

$$A^s \xrightarrow{\psi} A^r \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0.$$

Il nucleo di  $\psi$  è formato dalle sigizie dell'insieme  $\{h_1, \dots, h_s\}$ , quindi possiamo ripetere il ragionamento fatto in precedenza per trovare un omomorfismo  $\chi : A^t \rightarrow A^s$  che allunga la successione esatta. Questo procedimento risulta applicabile infinite volte e quindi genera una successione esatta infinita di  $A$ -moduli.

**Definizione 1.19.** Sia  $M$  un  $A$ -modulo. Una *risoluzione libera* di  $M$  è una successione esatta

$$\dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad (1.5)$$

dove per ogni  $j$ ,  $F_j = A^{r_j}$  è un  $A$ -modulo libero. Se inoltre esiste  $\lambda$  tale che  $F_{\lambda+1} = F_{\lambda+2} = \dots = 0$  e  $F_\lambda \neq 0$ , allora la risoluzione si dice *finita di lunghezza*  $\lambda$  e si scrive

$$0 \longrightarrow F_\lambda \longrightarrow F_{\lambda-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0. \quad (1.6)$$

Nel caso di  $A$ -moduli finitamente generati, l'esistenza di una risoluzione finita è garantita dal famoso Teorema delle Sigizie di Hilbert. Prima di enunciare e dimostrare questo notevole risultato consideriamo il seguente lemma basato sul Teorema di Schreyer (1.9).

**Lemma 1.11.** *Sia  $M \subseteq A^r$  un  $A$ -modulo e sia  $\mathcal{G}$  una sua base di Gröbner secondo un certo ordinamento monomiale fissato. Se le variabili  $X_1, \dots, X_m$  non compaiono nei leading terms degli elementi di  $\mathcal{G}$ , allora le variabili  $X_1, \dots, X_m, X_{m+1}$  non compaiono nei leading terms degli elementi  $s_{ij}$ , definiti dalla (1.4), secondo l'ordinamento monomiale introdotto nel Teorema 1.9.*

*Dimostrazione.* Ordiniamo gli elementi della base di Gröbner  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$  in modo che se  $\text{LT}(g_i)$  e  $\text{LT}(g_j)$  contengono entrambi il vettore  $e_k$  e  $i < j$ , allora  $\text{LM}(g_i)/e_k >_{\text{Lex}} \text{LM}(g_j)/e_k$  secondo il term order lessicografico su  $A$  ( $X_1 > X_2 > \dots > X_n$ ). Possiamo limitarci a ragionare proprio su queste coppie  $(g_i, g_j)$  tali che  $\text{LT}(g_i)$  e  $\text{LT}(g_j)$  contengono lo stesso vettore della base standard di  $A^s$  e tali che  $i < j$  perché:

- il minimo comune multiplo di due monomi è non nullo solo se i due monomi contengono lo stesso elemento della base standard;
- $s_{ij}$  e  $s_{ji}$  sono uguali a meno del segno.

Chiamato  $m_{ij} = \text{mcm}(\text{LT}(g_i), \text{LT}(g_j))$ , abbiamo che

$$\text{LT}(s_{ij}) = \frac{m_{ij}}{\text{LT}(g_i)} \epsilon_i. \quad (1.7)$$

Infatti

1.

$$\text{LT}\left(\frac{m_{ij}}{\text{LT}(g_i)} g_i\right) = \text{LT}\left(\frac{m_{ij}}{\text{LT}(g_j)} g_j\right) \quad \text{e} \quad i < j \implies \frac{m_{ij}}{\text{LT}(g_i)} \epsilon_i >_{\mathcal{G}} \frac{m_{ij}}{\text{LT}(g_j)} \epsilon_j$$

2. la riduzione di  $S(g_i, g_j) = \sum a_k^{ij} g_k$  tale che  $\text{LT}(S(g_i, g_j)) \geq \text{LT}(a_k^{ij} g_k) \forall k$ , “cancella” i monomi più grandi quindi per  $k = 1, \dots, s$

$$\text{LT}\left(\frac{m_{ij}}{\text{LT}(g_i)} g_i\right) > \text{LT}(S(g_i, g_j)) \geq \text{LT}(a_k^{ij} g_k) \implies \frac{m_{ij}}{\text{LT}(g_i)} \epsilon_i >_{\mathcal{G}} a_k^{ij} \epsilon_k.$$

A questo punto, sfruttando l'ipotesi che le variabili  $X_1, \dots, X_m$  non compaiono nei leading term di  $\mathcal{G}$  sappiamo che

$$\frac{\text{LM}(g_i)}{e_k} = X_{m+1}^{\alpha_i} m_i, \quad \frac{\text{LM}(g_j)}{e_k} = X_{m+1}^{\alpha_j} m_j$$

dove  $m_i$  e  $m_j$  sono monomi di  $A$  nelle variabili  $X_{m+2}, \dots, X_n$ . Per l'ipotesi  $X_{m+1}^{\alpha_i} m_i >_{\text{Lex}} X_{m+1}^{\alpha_j} m_j$ ,  $\alpha_i$  è maggiore di  $\alpha_j$  quindi  $m_{ij}$  contiene la variabile  $X_{m+1}$  alla potenza  $\alpha_i$  e, concludendo,  $\text{LT}(s_{ij}) = \frac{m_{ij}}{\text{LT}(g_i)} \epsilon_i$  non contiene le variabili  $X_1, \dots, X_{m+1}$ . ■

**Teorema 1.12** (Teorema delle Sizigie di Hilbert). *Sia  $M$  un  $A$ -modulo finitamente generato ( $A = k[X_1, \dots, X_n]$ ). Allora esiste una risoluzione libera finita di  $M$  di lunghezza al più  $n$ .*

*Dimostrazione.* Dal momento che  $M$  è finitamente generato possiamo considerare la presentazione di  $M$

$$F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0,$$

definita scegliendo un sistema di generatori  $\{f_1, \dots, f_{r_0}\}$  di  $M$  e una base di Gröbner  $\mathcal{G}_0$  per il modulo  $\text{Syz}(f_1, \dots, f_{r_0})$ , costruita seguendo il Teorema 1.9. Abbiamo innanzitutto  $F_0 \simeq A^{r_0}$ . Ordiniamo ora gli elementi di  $\mathcal{G}_0$  nel modo illustrato nel lemma 1.11:  $(g_1, \dots, g_{r_1})$ . Applichiamo nuovamente il Teorema di Schreyer per generare una base di Gröbner  $\mathcal{G}_1$ , che supponiamo ridotta, di  $\text{Syz}(g_1, \dots, g_{r_1}) \subseteq A^{r_1}$ . Abbiamo costruito un altro pezzo della successione

$$F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0,$$

e il lemma 1.11 ci garantisce che nel caso peggiore, i leading monomial della base  $\mathcal{G}_1$  non contengono la variabile  $X_1$ . Iterando questo procedimento, dopo  $\lambda \leq n$  passi, abbiamo la successione esatta

$$F_{\lambda-1} \xrightarrow{\varphi_{\lambda-1}} \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0, \quad (1.8)$$

e siamo sicuri che la base di Gröbner  $\mathcal{G}_\lambda$  di  $\text{Syz}(\mathcal{G}_{\lambda-1})$  non contiene le variabili  $X_1, \dots, X_n$ . I leading terms degli elementi di  $\mathcal{G}_\lambda$  sono quindi prodotti di costanti per vettori della base standard. Quello che voglio far vedere è che gli elementi di  $\mathcal{G}_\lambda$  sono linearmente indipendenti. Per prima cosa li ordino in base ai leading terms:

$$(h_1, \dots, h_{r_\lambda}) \implies \text{LT}(h_1) \geq \dots \geq \text{LT}(h_{r_\lambda}).$$

L'ipotesi che  $\mathcal{G}_\lambda$  sia ridotta mi garantisce la disuguaglianza stretta, quindi nella combinazione lineare

$$c_1 h_1 + \dots + c_{r_\lambda} h_{r_\lambda} = 0$$

per annullare  $\text{LT}(h_1)$  devo avere  $c_1 = 0$ . Ripetendo il ragionamento sugli elementi  $(h_2, \dots, h_{r_\lambda})$  e procedendo per induzione si ottiene

$$c_1 = \dots = c_{r_\lambda} = 0 \implies \text{Syz}(\mathcal{G}_{\lambda-1}) \simeq A^{r_\lambda}.$$

Posso quindi completare la successione (1.8) con l'immersione  $\text{Syz}(\mathcal{G}_{\lambda-1}) = F_\lambda \hookrightarrow F_{\lambda-1}$ .

$$0 \longrightarrow F_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} F_{\lambda-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0 \quad (1.9)$$

è quindi una risoluzione libera finita di  $M$  di lunghezza al più  $n$  ( $\lambda \leq n$ ). ■

### 1.3.1 Il caso graduato

Durante questa discussione, interpreteremo l'anello  $A = k[X_0, \dots, X_n]$  dei polinomi in  $n + 1$  variabili con la struttura di anello graduato

$$A = \bigoplus_{s=0}^{\infty} A_s.$$

**Definizione 1.20.** Un *modulo graduato*  $M$  su  $A$  è una collezione di sottogruppi  $\{M_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  di  $M$  tale che

1. la struttura di gruppo è

$$M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t;$$

2. la struttura è compatibile con il prodotto per elementi di  $A$ , quindi

$$A_s \cdot M_t \subseteq M_{s+t}.$$

Gli elementi di  $M_t$  vengono detti *omogenei di grado  $t$* .

Facendo "slittare" la graduazione di un modulo  $M$ , è possibile costruire nuovi moduli graduati.

**Proposizione-Definizione 1.13.** Sia  $M = \bigoplus M_t$  un  $A$ -modulo graduato. Per un certo  $d \in \mathbb{Z}$  fissato, la somma diretta

$$M(d) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_{d+t} \tag{1.10}$$

è ancora un  $A$ -modulo graduato.

Se consideriamo come modulo graduato  $A^r$ , il modulo graduato  $A^r(d) = A(d)^r$  si dice *modulo libero twisted* di grado  $d$ . La graduazione influisce anche sulla definizione di omomorfismi di moduli graduati.

**Definizione 1.21.** Dati due  $A$ -moduli graduati  $M, N$ , un omomorfismo  $\varphi : M \rightarrow N$  si dice *graduato di grado  $d$* , se per ogni  $t \in \mathbb{Z}$

$$\varphi(M_t) \subseteq N_{t+d}.$$

Utilizzando i moduli twisted è facile costruire omomorfismi graduati, per esempio consideriamo un modulo graduato  $M$  generato dagli elementi omogenei  $f_1, \dots, f_r$  di grado  $d_1, \dots, d_r$ . Abbiamo quindi definito un morfismo non graduato tra  $A^r$  ed  $M$ . Per renderlo graduato basta considerare lo stesso omomorfismo definito tra

$$A(-d_1) \oplus \dots \oplus A(-d_r) \xrightarrow{\varphi} M.$$



Dal momento che

$$\left( A(-d_1) \oplus \dots \oplus A(-d_r) \right)_t = A(-d_1)_t \oplus \dots \oplus A(-d_r)_t = A_{t-d_1} \oplus \dots \oplus A_{t-d_r}$$

l'elemento omogeneo di grado  $t$  è del tipo  $h_1 e_1 + \dots + h_r e_r$  e per ogni  $i$  il grado di  $h_i$  in  $A$  è  $t - d_i$ . Pertanto

$$\varphi(h_1 e_1 + \dots + h_r e_r) = h_1 f_1 + \dots + h_r f_r$$

è un elemento omogeneo di grado  $t$  in  $M$ , cioè  $\varphi$  è un omomorfismo graduato di grado 0.

Si intuisce che ogni omomorfismo  $\varphi : A^m \rightarrow A^p$  può essere visto come omomorfismo graduato di grado 0 tra moduli twisted generati con opportuni shift. Consideriamo per esempio il morfismo  $\varphi$  è rappresentato da una matrice  $B$ , le cui colonne sono elementi omogenei anche di gradi diversi  $d_j$ . Preso un elemento generico  $h_1 e_1, \dots, h_m e_m$  in  $A^m$  tale che per ogni  $i$  il grado di  $h_i$  sia  $\delta_i$ , abbiamo che

$$\varphi(h_1 e_1 + \dots + h_m e_m) = B \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_j \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}h_1 + \dots + b_{1j}h_j + \dots + b_{1m}h_m \\ \vdots \\ b_{i1}h_1 + \dots + b_{ij}h_j + \dots + b_{im}h_m \\ \vdots \\ b_{p1}h_1 + \dots + b_{pj}h_j + \dots + b_{pm}h_m \end{pmatrix}$$

Affinché il morfismo sia graduato la generica componente  $(b_{i1}h_1 + \dots + b_{ij}h_j + \dots + b_{im}h_m)e_j$  deve essere omogenea, cioè

$$d_1 + \delta_1 = \dots = d_i + \delta_i = \dots = d_m + \delta_m = t.$$

Se voglio che  $\varphi$  sia graduato di grado 0, è sufficiente riconsiderare  $B$  dal modulo libero twisted  $A(-d_1) \oplus \dots \oplus A(-d_j) \oplus \dots \oplus A(-d_m)$  al modulo libero  $A^p$ . Ancora più in generale, un omomorfismo graduato di grado 0 tra i moduli twisted

$$A(-d_1) \oplus \dots \oplus A(-d_m) \longrightarrow A(-\delta_1) \oplus \dots \oplus A(-\delta_p)$$

si può scrivere come matrice i cui elementi  $b_{ij} \in A$  sono elementi omogenei di grado  $d_j - \delta_i$ . Infatti preso un elemento omogeneo  $\sum h_j e_j$  di grado  $t$  in  $A(-d_1) \oplus \dots \oplus A(-d_m)$  abbiamo che per ogni  $j$  il grado di  $h_j$  è  $t - d_j$  e la  $i$ -esima componente di  $B(\sum h_j e_j)$  è

$$b_{i1}h_1 + \dots + b_{ij}h_j + \dots + b_{im}h_m.$$

Il grado del generico elemento  $b_{ij}h_j$  è  $d_j - \delta_i + t - d_j = t - \delta_i$  quindi  $B(\sum h_j e_j)$  è omogeneo di grado  $t$  in  $A(-\delta_1) \oplus \dots \oplus A(-\delta_p)$ .

---

**Definizione 1.22.** Dato  $M$ , un  $A$ -modulo graduato, una *risoluzione graduata* di  $M$  è una risoluzione della forma

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

dove per ogni  $i$ ,  $F_i$  è un modulo libero twisted della forma  $A(-d_1) \oplus \cdots \oplus A(-d_{p_i})$  e ogni morfismo  $\varphi_i$  è un omomorfismo graduato di grado 0.

**Teorema 1.14** (Teorema Graduato delle Sizigie di Hilbert). *Sia  $M$  un  $A$ -modulo graduato finitamente generato ( $A = k[X_0, \dots, X_n]$ ). Allora esiste una risoluzione graduata finita di  $M$  di lunghezza al più  $n + 1$ .*

*Dimostrazione.* L'idea della dimostrazione è che per il Teorema delle Sizigie di Hilbert generale (1.12) sappiamo dell'esistenza di una risoluzione libera di lunghezza al più  $n + 1$  (in quanto abbiamo una variabile in più). Operando opportuni shift, seguendo la tecnica illustrata precedentemente, è possibile scrivere una risoluzione graduata. ■

## 1.4 Il polinomio di Hilbert

**Definizione 1.23.** Sia  $M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$  un modulo graduato su  $k[X_0, \dots, X_n]$ . Si definisce *funzione di Hilbert* di  $M$  la funzione  $HF_M : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  che associa ad ogni intero  $t$  la dimensione di  $M_t$  come spazio vettoriale su  $k$ :

$$HF_M(t) = \dim_k M_t. \quad (1.11)$$

Se consideriamo come modulo graduato l'anello dei polinomi stesso  $A = k[X_0, \dots, X_n]$ , abbiamo la funzione di Hilbert:

$$HF_A(t) = \binom{t+n}{n},$$

dove supponiamo che il binomiale  $\binom{a}{b}$  valga 0 se  $a < b$ . Se prendiamo il modulo twisted  $A(d)$  abbiamo che

$$HF_{A(d)}(t) = HF_A(t+d) = \binom{t+d+n}{n}.$$

Questo tipo di funzioni di Hilbert è polinomiale rispetto a  $t$  con  $t \geq 0$ , infatti

$$\binom{t+n}{n} = \frac{(t+n)!}{n!t!} = \frac{(t+n)(t+n-1)\cdots(t+1)}{n!}.$$

**Teorema 1.15.** *Sia  $M$  un modulo graduato su  $A$  finitamente generato. Allora*

1.  $HF_M(t) = 0$ , per ogni intero  $t$  sufficientemente piccolo;

2. esiste un unico polinomio  $HP_M$  tale che per ogni  $t$  sufficientemente grande

$$HF_M(t) = HP_M(t);$$

$HP_M$  viene detto polinomio di Hilbert del modulo  $M$ .

*Dimostrazione.* Per il Teorema delle Sizigie di Hilbert (1.14) esiste una risoluzione graduata finita di  $M$ :

$$0 \longrightarrow F_\lambda \longrightarrow F_{\lambda-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Dal momento che tutti gli omomorfismi sono graduati di grado 0, possiamo restringerci agli elementi omogenei di grado fissato  $t$ , ottenendo una successione esatta finita di  $k$  spazi vettoriali

$$0 \longrightarrow (F_\lambda)_t \longrightarrow (F_{\lambda-1})_t \longrightarrow \cdots \longrightarrow (F_1)_t \longrightarrow (F_0)_t \longrightarrow M_t \longrightarrow 0. \quad (1.12)$$

Per dimostrare il punto 1 consideriamo solo l'ultimo segmento della successione

$$(F_0)_t \xrightarrow{\varphi_0} M_t \longrightarrow 0.$$

$F_0$  è del tipo  $A(-d_1) \oplus \cdots \oplus A(-d_m)$  quindi abbiamo un naturale isomorfismo

$$(F_0)_t \simeq A(-d_1)_t \oplus \cdots \oplus A(-d_m)_t.$$

Dalla suriettività di  $\varphi_0$ , si deduce che

$$\dim M_t \leq \dim(F_0)_t = \dim A(-d_1)_t + \cdots + \dim A(-d_m)_t.$$

Preso una componente generica della somma diretta  $A(-d_i)_t$ , sappiamo che  $\dim A(-d_i)_t = \dim A_{t-d_i}$ , quindi  $\dim A(-d_i)_t = 0$  se  $t - d_i < 0 \Rightarrow t < d_i$ . Per ogni  $t < \min_{i=1 \dots m} \{d_i\}$ ,  $\dim M_t \leq 0 \Rightarrow \dim M_t = 0$ .

Per quanto riguarda il punto 2, osserviamo che per la (1.12)

$$\dim M_t = \sum_{j=0}^{\lambda} (-1)^j \dim(F_j)_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Denotando con  $HF_j$  la funzione di Hilbert del modulo graduato  $F_j$ , possiamo affermare che

$$HF_M(t) = \sum_{j=0}^{\lambda} (-1)^j HF_j(t).$$

Ogni modulo graduato  $F_j$  è del tipo  $A(-d_1) \oplus \cdots \oplus \cdots A(-d_p)$  quindi la funzione di Hilbert corrispondente è una somma di binomiali

$$HF_j(t) = \sum_{i=1}^p \binom{t - d_i + n}{n}$$

e risulta polinomiale se ogni addendo è polinomiale, cioè per

$$t \geq \max_{i=1 \dots p} \{d_i - n\}.$$

Per  $t$  sufficientemente grande ogni funzione  $HF_j$  risulta polinomiale quindi definisco

$$HF_M(t) = HP_M(t) = \sum_{j=0}^{\lambda} (-1)^j HF_j(t). \quad \blacksquare$$

**Esempio 1.24.** Nel caso dei quozienti dell'anello  $A$  per un suo ideale  $i$ , per calcolare la funzione di Hilbert di  $A/i$ , possiamo calcolare  $HF_i$  mediante una risoluzione e dedurre  $HF_{A/i}$  dalla successione esatta corta

$$0 \longrightarrow i \longrightarrow A \longrightarrow A/i \longrightarrow 0$$

per cui

$$HF_{A/i}(t) = HF_A(t) - HF_i(t).$$

Consideriamo come esempio l'ideale omogeneo  $i = (X^2 - XZ, XY, Y^2 - YZ)$  in  $k[X, Y, Z]$ . Calcolando una risoluzione con `Macaulay2` otteniamo

```
i1 : A = QQ[X, Y, Z];
i2 : I = ideal (X^2 - X*Z, X*Y, Y^2 - Y*Z);
o2 : Ideal of A
i3 : rI = resolution I
      1      3      2
o3 = A  <-- A  <-- A  <-- 0
      0      1      2      3
o3 : ChainComplex

i4 : rI.dd
      1      3
o4 = 0 : A  <----- A  : 1
      | 1X2-1XZ 1XY 1Y2-1YZ |
      3      2
      1 : A  <----- A  : 2
      {2} | -1Y  0      |
      {2} | 1X-1Z -1Y1Z |
      {2} | 0      1X   |
      2
      2 : A  <----- 0 : 3
      0
o4 : ChainComplexMap
```

che rappresenta la risoluzione

$$0 \longrightarrow A^2 \xrightarrow{\psi} A^3 \xrightarrow{\varphi} i \longrightarrow 0$$

dove l'omomorfismo  $\varphi$  è rappresentato dalla matrice riga

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} X^2 - XZ & XY & Y^2 - YZ \end{pmatrix}$$

e l'omomorfismo  $\psi$  dalla matrice

$$B_\psi = \begin{pmatrix} -Y & 0 \\ X - Z & -Y + Z \\ 0 & X \end{pmatrix}.$$

Per rendere l'omomorfismo  $\varphi$  graduato di grado 0 dobbiamo fare uno shift di un fattore -2 tutti gli addendi di  $A^3$  in quanto le tre colonne della matrice  $B_\varphi$  hanno grado 2. Voglio ora applicare uno shift a  $A^2$  in modo che anche  $\psi$  sia graduato di grado 0:

$$A(-d_1) \oplus A(-d_2) \longrightarrow A(-2)^3;$$

poiché tutti gli elementi non nulli della matrice  $B_\psi$  hanno grado 1 deve essere

$$d_1 - 2 = 1 \implies d_1 = 3 \quad \text{e} \quad d_2 - 2 = 1 \implies d_2 = 3.$$

La risoluzione graduata risulta quindi essere

$$0 \longrightarrow A(-3)^2 \xrightarrow{\psi} A(-2)^3 \xrightarrow{\varphi} i \longrightarrow 0.$$

Calcoliamo le funzioni di Hilbert di  $A(-2)$  e  $A(-3)$ :

$$HF_{A(-2)}(t) = \binom{t-2+2}{2} = \binom{t}{2} \quad HF_{A(-3)}(t) = \binom{t-3+2}{2} = \binom{t-1}{2}$$

e quindi

$$HF_i(t) = 3HF_{A(-2)}(t) - 2HF_{A(-3)}(t) = 3\binom{t}{2} - 2\binom{t-1}{2}$$

Dal momento che  $HF_A(t) = \binom{t+2}{2}$ , si ricava

$$HF_{A/i}(t) = \binom{t+2}{2} - 3\binom{t}{2} + 2\binom{t-1}{2};$$

se  $t \geq 1$  posso sviluppare i binomiali ottenendo il polinomio di Hilbert

$$HP_{A/i}(t) = \frac{(t+2)(t+1)}{2} - 3\frac{t(t-1)}{2} + 2\frac{(t-1)(t-2)}{2} = 3.$$

---

1. Basi di Gröbner e polinomio di Hilbert

---

```
i5 : HP = hilbertPolynomial (I,Projective => false)
o5 = 3
o5 : QQ [i]
```

**Esempio 1.25.** Consideriamo ora l'anello di polinomi  $A = k[X, Y, Z, W]$  e l'ideale  $i = (XZ - Y^2, YW - Z^2)$ . La risoluzione calcolata con `Macaulay2` è

```
i1 : A = QQ[X, Y, Z, W];
i2 : I = ideal (X*Z - Y^2, Y*W - Z^2);
o2 : Ideal of A
i3 : rI = resolution I
      1      2      1
o3 = A <-- A <-- A <-- 0
      0      1      2      3
o3 : ChainComplex
i4 : rI.dd
      1      2
o4 = 0 : A <----- A : 1
      | 1Y2-1XZ 1Z2-1YW |
      2      1
      1 : A <----- A : 2
      {2} | -1Z21YW |
      {2} | 1Y2-1XZ |
      1
      2 : A <----- 0 : 3
      0
o4 : ChainComplexMap
```

Effettuando gli shift opportuni, la risoluzione graduata è

$$0 \longrightarrow A(-4) \longrightarrow A(-2)^2 \longrightarrow i \longrightarrow 0,$$

pertanto

$$HF_i(t) = 2HF_{A(-2)}(t) - HF_{A(-4)}(t) = 2\binom{t+1}{3} - \binom{t-1}{3}$$

da cui calcoliamo la funzione di Hilbert di  $A/i$

$$HF_{A/i}(t) = \binom{t+3}{3} - 2\binom{t+1}{3} + \binom{t-1}{3}.$$

$HF_{A/i}$  è sicuramente polinomiale per  $t \geq \max\{-3, -1, 1\} \Rightarrow t > 0$ :

$$\begin{aligned} HP_{A/i}(t) &= \frac{(t+3)(t+2)(t+1)}{3!} - 2\frac{(t+1)t(t-1)}{3!} + \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{3!} = \\ &= 4t. \end{aligned}$$

```
i5 : HP = hilbertPolynomial (I,Projective=>false)
o5 = 4i
o5 : QQ [i]
```

### 1.4.1 Polinomi numerici

Concludiamo il capitolo con una breve discussione sui polinomi numerici.

**Definizione 1.26.** Un polinomio  $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$  si dice *polinomio numerico* se per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  sufficientemente grande,  $P(n)$  appartiene a  $\mathbb{Z}$ .

**Proposizione 1.16.** Sia  $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$  un polinomio numerico di grado  $d$ . Esiste una sequenza di  $d + 1$  interi  $c_0, \dots, c_d$  tali che

$$P(z) = \sum_{j=0}^d c_j \binom{z}{d-j} = c_0 \binom{z}{d} + c_1 \binom{z}{d-1} + \dots + c_d.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la proposizione procedendo per induzione sul grado del polinomio  $P(z)$ . Se  $d = 0$ , è immediato:  $P(z) = c_0 \in \mathbb{Q}$ . Supponiamo ora che la proposizione sia vera per ogni polinomio di grado minore o uguale a  $d - 1$  e verifichiamolo per un qualsiasi polinomio  $Q(z)$  di grado  $d$ . Questo polinomio sarà quindi del tipo

$$Q(z) = a_d z^d + \dots;$$

considero ora il polinomio

$$R(z) = Q(z) - (a_d \cdot d!) \binom{z}{d}$$

che posso esprimere come somma di binomiali in quanto il grado di  $R(z)$  è sicuramente strettamente minore di  $d$  perché i termini di grado  $d$  si semplificano, cioè

$$Q(z) - (a_d \cdot d!) \binom{z}{d} = c_1 \binom{z}{d-1} + \dots + c_d.$$

Ponendo  $c_0 = a_d \cdot d! \in \mathbb{Q}$ , si ottiene

$$Q(z) = c_0 \binom{z}{d} + c_1 \binom{z}{d-1} + \dots + c_d. \quad \blacksquare$$

Rimane da far vedere che i coefficienti scelti sono interi. Sempre per induzione sul grado di  $Q(z)$ , nel caso  $d = 0$ ,  $c_0$  deve appartenere a  $\mathbb{Z}$  altrimenti  $Q(z)$  non sarebbe numerico. Supponiamo quindi che tutti i polinomi numerici di grado strettamente minore di  $d$ , abbiano coefficienti  $c_0, \dots, c_{d-1}$  in  $\mathbb{Z}$ . Preso un polinomio numerico  $Q(z)$  di grado  $d$ , consideriamo il polinomio differenza

$$\begin{aligned} \Delta Q(z) &= Q(z+1) - Q(z) = \\ &= c_0 \left( \binom{z+1}{d} - \binom{z}{d} \right) + \dots + c_{d-1} \left( \binom{z+1}{1} - \binom{z}{1} \right) \end{aligned}$$

che per la formula di Stiefel risulta essere uguale a

$$c_0 \binom{z}{d-1} + \dots + c_{d-1}.$$

Quest'ultimo polinomio ha grado al più  $d-1$  ed è numerico, quindi per l'ipotesi induttiva  $c_0, \dots, c_{d-1}$  appartengono a  $\mathbb{Z}$ . Infine  $c_d$  deve essere intero, perché  $P(n) \in \mathbb{Z}, \forall n \gg 0$ .

**Proposizione 1.17.** *Sia  $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$  un polinomio numerico di grado  $d$ . Esiste una sequenza di  $d+1$  interi  $c_0, \dots, c_d$  tali che*

$$P(z) = \sum_{j=0}^d c_j \binom{z+j}{j} = c_0 + c_1 \binom{z+1}{1} + c_2 \binom{z+2}{2} + \dots + c_d \binom{z+d}{d}.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue esattamente la tecnica induttiva usata nella dimostrazione della Proposizione 1.16. Interessante notare che

$$P(z) = c_0 + c_1(z+1) + \frac{c_2}{2!}(z+1)(z+2) + \dots + \frac{c_d}{d!}(z+1) \cdots (z+d)$$

può essere riscritto come

$$P(z) = c_0 + (z+1) \left( c_1 + \frac{z+2}{2} \left( \dots + \frac{z+d-1}{d-1} \left( c_{d-1} + c_d \frac{z+d}{d} \right) \right) \right). \quad \blacksquare$$

**Proposizione 1.18.** *Sia  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  una funzione qualsiasi. Se esiste un polinomio numerico  $Q$ , tale che  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = Q(n)$  per ogni  $n \gg 0$ , allora esiste un polinomio numerico  $P$  tale che per  $n \gg 0$*

$$f(n) = P(n).$$

*Dimostrazione.* Scriviamo innanzitutto il polinomio  $Q$  come nella Proposizione 1.16:

$$Q(n) = c_0 \binom{n}{r} + c_1 \binom{n}{r-1} + \dots + c_r,$$

con  $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$ . Consideriamo ora il polinomio

$$P(n) = c_0 \binom{n}{r+1} + c_1 \binom{n}{r} + \dots + c_r \binom{n}{1},$$

tale che

$$\begin{aligned} \Delta P(n) &= P(n+1) - P(n) = \sum_{j=0}^r c_j \left( \binom{n+1}{r+1-j} - \binom{n}{r+1-j} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^r c_j \binom{n}{r-j} = Q(n) = \Delta f(n). \end{aligned}$$

Pertanto, per  $n \gg 0$

$$\Delta(f - P)(n) = 0 \implies (f - P)(n) = c_{r+1},$$

da cui

$$f(n) = P(n) + c_{r+1}. \quad \blacksquare$$



*L'année 1955 marque un tournant crucial dans  
mon travail mathématique: celui du passage  
de l' "analyse" à la "géométrie".  
Je me rappelle encore de cette impression saisissante  
[...] comme si je quittais des steppes arides et  
revêches, pour me retrouver soudain dans un sort  
de "pays promis" aux richesses luxuriantes [...].*

Alexandre GROTHENDIECK [**R&S**]

## Capitolo 2

# Spazi anellati

Nella geometria algebrica classica, lo studio degli zeri dei polinomi su un campo  $k$  rivela una corrispondenza tra alcuni particolari oggetti geometrici e alcuni particolari oggetti algebrici: da un lato abbiamo le varietà affini, dall'altro le  $k$ -algebre finitamente generate. L'idea alla base degli schemi risponde alla seguente domanda: "se come oggetti algebrici si considerano tutti gli anelli commutativi con identità, che corrispondenti geometrici si trovano?" La risposta è: gli *schemi affini*.

$$\begin{array}{ccc} \{\text{varietà affini}\} & \longleftrightarrow & \{k\text{-algebre finitamente generate}\} \\ \cap & & \cap \\ \{\text{schemi affini}\} & \longleftrightarrow & \{\text{anelli commutativi con identità}\} \end{array}$$

### 2.1 Lo spettro di un anello

Nella trattazione, per anello  $A$  si intenderà sempre un anello commutativo con unità e per morfismo  $\phi : A \rightarrow B$  si intenderà morfismo di anelli commutativi con unità, cioè tale che  $\phi(1_A) = 1_B$ .

**Definizione 2.1.** Si definisce *spettro primo* di un anello  $A$  e si indica con  $\text{Spec } A$  l'insieme formato dagli ideali primi di  $A$ , cioè

$$\text{Spec } A = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \subsetneq A \text{ è un ideale primo}\}. \quad (2.1)$$

Si definisce *spettro massimale* e si indica con  $\text{m-Spec } A$  l'insieme formato dagli ideali massimali.

$\text{Spec } A$  non contiene quindi l'anello  $A$ , ma contiene, se primo, l'ideale  $(0)$ . Per comodità si userà semplicemente *spettro* in luogo di spettro primo.

Esempi facili sono quindi:

- $\text{Spec } \mathbb{Z} = \{(0), (2), (3), (5), (7), \dots\}$ ;
- considerato un campo  $k$  e l'anello dei polinomi in una variabile  $k[X]$ , si ha che

$$\text{Spec } k[X] = (0) \cup \{(f) \mid f \text{ è un polinomio irriducibile}\}.$$

La definizione data è consistente, nel senso che l'insieme  $\text{Spec } A$  non è vuoto in quanto una nota applicazione del lemma di Zorn ci assicura l'esistenza di almeno un ideale massimale, e quindi anche primo, in ogni anello  $A \neq 0$  (si veda per esempio [AM, Ch. 1, Th. 1.3]).

**Proposizione 2.1.** *Sia  $A$  un anello,  $S$  un sistema moltiplicativo e sia  $i$  un ideale di  $A$  disgiunto da  $S$ ,  $i \cap S = \emptyset$ . Allora esiste un ideale primo  $\mathfrak{p}$  di  $A$ , disgiunto da  $S$ , che contiene  $i$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo di aver trovato  $\mathfrak{p}$ , il più grande ideale contenente  $i$  che rispetta la condizione  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ :  $\mathfrak{p}$  è un ideale primo. Si considerino due elementi  $x, y \notin \mathfrak{p}$ : gli ideali  $\mathfrak{p} + Ax$  e  $\mathfrak{p} + Ay$  sono strettamente più grandi di  $\mathfrak{p}$ , pertanto  $(\mathfrak{p} + Ax) \cap S \neq \emptyset$  e  $(\mathfrak{p} + Ay) \cap S \neq \emptyset$ . È possibile quindi trovare due elementi  $p + ax, q + by \in S$ , con  $p, q \in \mathfrak{p}$  e  $a, b \in A$ . Per ipotesi,  $S$  è chiuso rispetto al prodotto quindi

$$(p + ax)(q + by) = pq + (by)p + (ax)q + (ab)xy \in S;$$

dal momento che  $pq + (by)p + (ax)q$  appartiene a  $\mathfrak{p}$ ,  $xy \notin \mathfrak{p}$ .

Rimane da dimostrare che è possibile trovare un elemento massimale tra gli ideali contenenti  $i$ , disgiunti da  $S$ . È sufficiente applicare il lemma di Zorn all'insieme

$$\Sigma = \{\mathfrak{q} \mid i \subseteq \mathfrak{q} \text{ e } \mathfrak{q} \cap S = \emptyset\}.$$

$\Sigma$  è non vuoto in quanto  $i \in \Sigma$ ; inoltre ogni catena  $\{\mathfrak{q}_\alpha\}_\alpha$  ha limite superiore, infatti  $\bigcup_\alpha \mathfrak{q}_\alpha$  è ancora un ideale disgiunto da  $S$ . ■

Applicando questa proposizione al sistema moltiplicativo  $S = \{1\}$  e all'ideale  $i = (0)$  ( $1 \neq 0$ ) siamo in grado di costruire un ideale primo, cioè di determinare un elemento di  $\text{Spec } A$ .

**Definizione 2.2.** Considerato  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ , si definisce *campo residuo* di  $A$  in  $\mathfrak{p}$ , e si indica con  $k(\mathfrak{p})$ , il campo delle frazioni del dominio di integrità  $A/\mathfrak{p}$ .

Ogni elemento  $f$  di  $A$ , definisce una "funzione" sullo spazio  $\text{Spec } A$ : il valore di  $f$  in  $\mathfrak{p}$  è l'immagine secondo i morfismi canonici ( $A \rightarrow A/\mathfrak{p} \rightarrow k(\mathfrak{p})$ ) di  $f$  nel

campo residuo  $k(\mathfrak{p})$ :

$$\begin{aligned} f : \text{Spec } A &\rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A} k(\mathfrak{p}), \\ \mathfrak{p} &\mapsto \bar{f} \in k(\mathfrak{p}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nel caso particolare di  $A = k[X]$  con  $k$  algebricamente chiuso, gli ideali primi sono  $(0)$  e i massimali del tipo  $(X - \alpha)$  con  $\alpha \in k$ , pertanto il campo residuo in  $(X - \alpha)$  è  $k[X]/(X - \alpha) \simeq k$  per ogni  $\alpha$ , mentre  $k[X]_{(0)} = k(X)$ . Preso un polinomio  $f(X) \in k[X]$ , il valore di  $f(X)$  su  $(X - \alpha)$  è la valutazione di  $f$  su  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} f(X) : \text{Spec } k[X] &\longrightarrow k \coprod k(X), \\ (X - \alpha) &\longmapsto f(\alpha) \in k, \forall \alpha \neq 0, \\ (0) &\longmapsto f(X) \in k(X). \end{aligned}$$

**Esempio 2.3.** Consideriamo  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  e la "funzione" 14 su di esso:

$$\begin{aligned} 14 : \text{Spec } \mathbb{Z} &\rightarrow \prod_{(p) \in \text{Spec } \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \\ (0) &\mapsto 14 \in \mathbb{Z}_{(0)} = \mathbb{Q} \\ (2) &\mapsto [14]_{\mathbb{Z}_2} = 0 \\ (3) &\mapsto [14]_{\mathbb{Z}_3} = 2 \\ (5) &\mapsto [14]_{\mathbb{Z}_5} = 4 \\ (7) &\mapsto [14]_{\mathbb{Z}_7} = 0 \\ (11) &\mapsto [14]_{\mathbb{Z}_{11}} = 3 \\ (13) &\mapsto [14]_{\mathbb{Z}_{13}} = 1 \\ (k) &\mapsto [14]_{\mathbb{Z}_k} = 14, \quad \forall k > 14 \text{ primo.} \end{aligned}$$

Considerato un morfismo di anelli  $\varphi : A \rightarrow B$ , sarebbe utile poter associare in modo naturale una mappa  ${}^a\varphi$  tra gli spettri degli anelli di partenza. Questo è possibile, sfruttando la proprietà che la controimmagine di un ideale primo è ancora un ideale primo; pertanto definiamo

$$\begin{aligned} {}^a\varphi : \text{Spec } B &\rightarrow \text{Spec } A, \\ \mathfrak{b} &\mapsto \mathfrak{a} = \varphi^{-1}(\mathfrak{b}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Preso un anello  $A$  e un suo sistema moltiplicativo  $S$ , è possibile costruire l'anello  $S^{-1}A$  delle frazioni in  $A$  rispetto ad  $S$ , definito sugli elementi  $(a, s) \in A \times S$  nel modo usuale, identificando le coppie secondo la relazione

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \exists s'' \in S \text{ t.c. } s''(as' - a's) = 0.$$

con le operazioni

$$\begin{aligned}(a_1, s_1) + (a_2, s_2) &= (a_1s_2 + a_2s_1, s_1s_2), \\ (a_1, s_1) \cdot (a_2, s_2) &= (a_1 \cdot a_2, s_1 \cdot s_2).\end{aligned}$$

D'ora in avanti si scriverà  $a/s$  al posto di  $(a, s)$ . Si consideri l'iniezione  $\varphi : A \hookrightarrow S^{-1}A$  che associa ad ogni elemento  $x \in A$  l'elemento  $x/1 \in S^{-1}A$ ; per quanto detto esiste la mappa associata

$${}^a\varphi : \text{Spec } S^{-1}A \rightarrow \text{Spec } A.$$

Ogni ideale di  $S^{-1}A$  per essere proprio non deve contenere alcun elemento appartenente al sistema moltiplicativo  $S$ . Si consideri l'ideale  $i$  di  $S^{-1}A$  e si supponga che l'elemento  $s = s/1$  appartenga a  $i$ : moltiplicando per l'elemento  $1/s$  si ottiene

$$(s/1) \cdot (1/s) = s/s \sim 1/1 \in i$$

pertanto  $i$  contiene l'unità di  $S^{-1}A$  e coincide con l'intero anello. Da questa proprietà si deduce che l'immagine di  $\text{Spec } S^{-1}A$  mediante  ${}^a\varphi$  è l'insieme degli ideali di  $A$  disgiunti da  $S$ :

$${}^a\varphi(\text{Spec } S^{-1}A) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\},$$

pertanto la mappa  ${}^a\varphi$  risulta essere una iniezione.

Un caso particolare si ha prendendo  $S = A \setminus \mathfrak{p}$ , dove  $\mathfrak{p}$  è un ideale primo. Si verifica immediatamente che  $S$  è un insieme moltiplicativo, in quanto  $1 \notin \mathfrak{p}$  e  $\forall g, h \notin \mathfrak{p}$  allora anche  $gh$  non appartiene a  $\mathfrak{p}$ . Si tratta dell'anello locale di  $A$  in  $\mathfrak{p}$  e si indica con  $A_{\mathfrak{p}}$ . Altro caso particolare è  $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ , con  $f$  non nilpotente: si scrive  $A_f$ .

### 2.1.1 Esempi non banali

**Esempio 2.4.** Il primo esempio riguarda la caratterizzazione degli ideali primi dell'anello dei polinomi in due variabili su un campo qualsiasi  $k$ .

**Proposizione 2.2.** *L'insieme degli ideali primi di  $k[X, Y]$  è il seguente*

$$\begin{aligned}\text{Spec } k[X, Y] &= \{(0)\} \cup \{(f) \mid f \text{ è un polinomio irriducibile}\} \\ &\cup \{\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \text{ è un ideale massimale}\}.\end{aligned}$$

*Inoltre gli ideali massimali sono della forma  $(h, g)$  dove  $h = h(X)$  è un polinomio irriducibile in  $k[X]$  e  $g = g(X, Y)$  è tale che la sua immagine nel quoziente  $(k[X]/(h))[Y]$  è irriducibile.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che l'ideale primo  $\mathfrak{p}$  non sia l'ideale  $(0)$  nè un ideale principale.  $\mathfrak{p}$  deve quindi contenere due elementi  $f_1, f_2 \in k[X, Y]$  coprimi, cioè  $(f_1, f_2) = 1$ .

Per prima cosa si dimostra che  $f_1$  e  $f_2$  sono coprimi anche in  $k(X)[Y]$ . Supponiamo per assurdo che  $f_1$  e  $f_2$  abbiano un fattore comune in  $k(X)[Y]$ :

$$f_1 = g_1 p, \quad f_2 = g_2 p, \quad g_1, g_2, p \in k(X)[Y].$$

Raccogliendo il massimo comun denominatore si possono riscrivere i polinomi  $g_1, g_2$  e  $p$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} g_1 &= b_1 \gamma_1, \\ g_2 &= b_2 \gamma_2, \\ p &= a p_0, \end{aligned} \quad a, b_1, b_2 \in k(X), \quad p_0, \gamma_1, \gamma_2 \in k[X, Y].$$

Riscrivendo ora i polinomi  $f_1$  e  $f_2$ , si trova

$$\begin{aligned} f_1 &= (ab_1)(p_0\gamma_1), \\ f_2 &= (ab_2)(p_0\gamma_2). \end{aligned}$$

$p_0\gamma_1$  e  $p_0\gamma_2$  appartengono a  $k[X, Y]$  per costruzione e dal momento che  $f_1, f_2 \in k[X, Y]$ , anche  $ab_1$  e  $ab_2$  devono essere polinomi in  $k[X, Y]$ , si ottiene che

$$(f_1, f_2) = p_0 \text{ in } k[X, Y]$$

in contrasto con l'ipotesi iniziale, pertanto  $(f_1, f_2) = 1$  anche in  $k(X)[Y]$ .

Il secondo passo è dimostrare che ogni ideale primo  $\mathfrak{p}$  di questo tipo ha intersezione non vuota con  $k[X]$ . Essendo  $k(X)[Y]$  un PID, la condizione sui polinomi  $(f_1, f_2) = 1$  implica che esistano  $x, y \in k(X)[Y]$  tali che

$$1 = x f_1 + y f_2;$$

raccogliendo il massimo comun denominatore  $d \in k[X]$  e moltiplicando per  $d$  entrambi i membri si ottiene

$$(dx)f_1 + (dy)f_2 = d \in k[X] \cap \mathfrak{p}.$$

Per le proprietà degli ideali è noto che se  $\mathfrak{p}$  è primo in  $k[X, Y]$  allora anche  $\mathfrak{p} \cap k[X]$  è primo; a questo punto sfruttando il fatto che  $k[X]$  è un PID, nelle ipotesi considerate si ottiene il polinomio  $h$  irriducibile in  $k[X]$  come generatore dell'ideale intersezione

$$(h) = \mathfrak{p} \cap k[X].$$

Consideriamo ora il morfismo quoziente

$$\begin{aligned} \varphi : k[X, Y] &\rightarrow \frac{k[X, Y]}{(h)} \simeq \left( \frac{k[X]}{(h)} \right) [Y], \\ q &\mapsto q \text{ mod } h. \end{aligned}$$

Dal momento che  $f_2$  non ha fattori comuni con  $p$  (è possibile sceglierlo in questo modo perché  $\mathfrak{p}$  non è un ideale principale),  $\overline{f_2} = \varphi(f_2) \neq 0$  appartiene all'ideale primo  $\overline{\mathfrak{p}} = \varphi(\mathfrak{p}) \neq (0)$ . In un PID un ideale primo è anche massimale, quindi  $\frac{k[X]}{(h)}$  è un campo; da ciò si deduce che  $\left(\frac{k[X]}{(h)}\right)[Y]$  è anch'esso un PID e pertanto esiste un elemento  $\overline{g}$  irriducibile tale che

$$(\overline{g}) = \overline{\mathfrak{p}}.$$

$g = \varphi^{-1}(\overline{g})$  è il secondo elemento cercato. ■

**Esempio 2.5.** In questo esempio si utilizzano le nozioni di mappe tra spettri per dedurre la composizione dello spettro dell'anello degli interi di Gauss a partire dall'iniezione  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[i]$  ( $1 \mapsto 1$ ). Partendo dalla mappa indotta sugli spettri

$${}^a\varphi : \text{Spec } \mathbb{Z}[i] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z},$$

si denotino con  $\omega$  e  $\omega'$  i punti di  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  e  $\text{Spec } \mathbb{Z}[i]$  corrispondenti agli ideali nulli tali per cui  $({}^a\varphi)^{-1}(\omega) = \omega'$ . Per costruzione, preso un ideale  $\mathfrak{p}$  di  $\mathbb{Z}$ ,  $({}^a\varphi)^{-1}(\mathfrak{p})$  corrisponde all'ideale di  $\mathbb{Z}[i]$  che divide  $\mathfrak{p}$ . Per esempio se  $\mathfrak{p} = (5)$ , l'ideale  $(5)$  non è primo in  $\mathbb{Z}[i]$  in quanto  $(2-i)(2+i) = 5$ , quindi

$$({}^a\varphi)^{-1}((5)) = \{(2+i), (2-i)\}.$$

Si possono distinguere tre casi

- se  $\mathfrak{p} = (2)$ , allora c'è un'unica controimmagine

$$({}^a\varphi)^{-1}((2)) = \{(1+i)\};$$

- se  $\mathfrak{p} = (p)$ ,  $p > 2$  ed esistono due interi  $a$  e  $b$  tali che  $p$  si decompone come somma dei loro quadrati  $p = a^2 + b^2$ , allora ci sono due elementi di  $\text{Spec } \mathbb{Z}[i]$  controimmagine di  $\mathfrak{p}$

$$({}^a\varphi)^{-1}((p)) = \{(a+ib), (a-ib)\};$$

- se  $\mathfrak{p} = (p)$ ,  $p > 2$  e  $p$  non si decompone come somma di quadrati allora l'ideale  $(p)$  è primo anche in  $\mathbb{Z}[i]$ , pertanto

$$({}^a\varphi)^{-1}((p)) = \{(p)\}.$$

Rimane da capire quando un intero primo ( $\neq 2$ ) si decompone come somma di quadrati. Vale il seguente risultato di teoria dei numeri

**Teorema 2.3.** *Sia  $p \in \mathbb{Z}$  primo ( $\neq 2$ ). Allora*

$$p \equiv 1 \pmod{4} \iff p = a^2 + b^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Per una dimostrazione si guardi [Gross].

---

### 2.1.2 Ideali radicali

**Definizione 2.6.** Sia  $A$  un anello. Un elemento  $a \in A$  si dice *nilpotente* se esiste  $n > 0 \in \mathbb{Z}$  tale per cui  $a^n = 0$ . Un anello privo di elementi nilpotenti si dice *ridotto*.

**Proposizione 2.4.** L'insieme degli elementi nilpotenti di  $A$  è un ideale. Questo ideale viene detto *nilradicale* e indicato con  $\text{nilrad } A$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\text{nilrad } A = \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ per un certo intero } n > 0\}$ . Si considerino due elementi  $x, y \in \text{nilrad } A$  e le due potenze  $n$  ed  $m$  che li annullano ( $x^n = 0, y^m = 0$ ), e due elementi qualsiasi  $a, b \in A$ . Affinché  $\text{nilrad } A$  sia un ideale  $ax + by$  deve appartenere all'insieme; eleviamo l'elemento alla potenza  $n + m - 1$ :

$$\begin{aligned} (ax + by)^{n+m-1} &= \\ &= (\dots)x^{n+m-1} + \dots + (\dots)x^{n+h}y^{m-h-1} + \dots + (\dots)x^n y^{m-1} + \\ &+ (\dots)x^{n-1}y^m + \dots + (\dots)x^{n-k-1}y^{m+k} + \dots + (\dots)y^{n+m-1} = \\ &= (\dots)x^{m-1}(x^n) + \dots + (\dots)x^h(x^n)y^{m-h-1} + \dots + (\dots)(x^n)y^{m-1} + \\ &+ (\dots)x^{n-1}(y^m) + \dots + (\dots)x^{n-k-1}y^h(y^m) + \dots + (\dots)y^{n-1}(y^m) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Un'applicazione della proposizione 2.1 consente di dimostrare la seguente

**Proposizione 2.5.**

$$\text{nilrad } A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A} \mathfrak{p}. \quad (2.4)$$

In modo equivalente,  $a \in A$  non è nilpotente se e solo se esiste un ideale primo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  tale che  $a \notin \mathfrak{p}$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $a$  elemento nilpotente di  $A$ , annullato dall'esponente  $n$ . Abbiamo quindi

$$a^n = 0 \in \mathfrak{p}, \quad \forall \mathfrak{p} \text{ ideale di } A.$$

In particolare, limitandosi agli ideali primi, si può dedurre che

$$a^n = a \cdot a^{n-1} \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p} \vee a^{n-1} \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}.$$

Viceversa, prendiamo  $b$  elemento non nilpotente. L'insieme  $S = \{1, b, b^2, \dots, b^m, \dots\}$  è un sistema moltiplicativo, pertanto applicando la proposizione 2.1 ad  $S$  e  $i = (0)$  si trova  $\mathfrak{p}$  primo tale che  $b \notin \mathfrak{p}$ .  $\blacksquare$

Considerato un qualsiasi ideale  $i$  di  $A$ , si definisce *radicale* di  $i$  l'ideale

$$\sqrt{i} = \{a \in A \mid a^n \in i \text{ per un qualche } n\}.$$



È immediato dedurre che  $\sqrt{(0)} = \text{nilrad } A$ . Se inoltre consideriamo l'omomorfismo quoziente  $\varphi : A \rightarrow A/\mathfrak{i}$ , gli elementi del radicale di  $\mathfrak{i}$  vengono mappati in elementi nilpotenti del quoziente pertanto, è vero che

$$\sqrt{\mathfrak{i}} = \varphi^{-1}(\text{nilrad}(A/\mathfrak{i})).$$

**Proposizione 2.6.**

$$\sqrt{\mathfrak{i}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{i}} \mathfrak{p}, \quad (2.5)$$

*cioè il radicale di un ideale  $\mathfrak{i}$  è dato dall'intersezione di tutti gli ideali primi di  $A$  che lo contengono.*

*Dimostrazione.* Possiamo calcolare gli ideali primi  $\mathfrak{q}$  di  $A$  contenenti  $\mathfrak{i}$  come controimmagine degli ideali primi del quoziente  $A/\mathfrak{i}$ , pertanto si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathfrak{i}} &= \varphi^{-1}(\text{nilrad}(A/\mathfrak{i})) = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A/\mathfrak{i}} \mathfrak{q}\right) = \\ &= \bigcap_{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A/\mathfrak{i}} \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{i}} \mathfrak{p}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 2.1.3 La topologia di Zariski

All'insieme  $\text{Spec } A$  è possibile dare la struttura di spazio topologico, con la seguente definizione di insieme chiuso

**Proposizione-Definizione 2.7.** *La topologia di Zariski dell'insieme  $\text{Spec } A$  è la topologia dove i chiusi sono gli insiemi*

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{i} \subset \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f(\mathfrak{p}) = 0, \forall f \in \mathfrak{i}\}. \quad (2.6)$$

*dove  $\mathfrak{i}$  è un ideale di  $A$ .*

*Dimostrazione.* La verifica delle quattro condizioni è immediata.

1.  $\mathcal{V}((0)) = \text{Spec } A$ .
2.  $\mathcal{V}(A) = \emptyset$ .
3. Per ogni coppia di ideali  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{b}$

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{b}) = \mathcal{V}(\mathfrak{ab});$$

l'inclusione  $\subseteq$  è ovvia in quanto ogni  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  che contiene  $\mathfrak{a}$  o  $\mathfrak{b}$ , contiene  $\mathfrak{ab}$ . Viceversa supponiamo che  $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{ab}$  e che  $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{b}$ : ciò implica che esiste  $b \in \mathfrak{b}$  tale che  $b \notin \mathfrak{p}$ . Per ogni elemento  $a \in \mathfrak{a}$ ,  $ab$  appartiene a  $\mathfrak{p}$  ed essendo  $\mathfrak{p}$  primo obbligatoriamente  $a$  appartiene a  $\mathfrak{p}$ , quindi  $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ .

4. Per ogni sistema di ideali  $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ,

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \mathfrak{a}_i\right)$$

in quanto un qualsiasi ideale primo  $\mathfrak{p}$  contiene tutti gli ideali  $\mathfrak{a}_i$  se e solo se contiene l'ideale  $\sum \mathfrak{a}_i$  che per definizione è il più piccolo ideale che li contiene tutti. ■

*Osservazione 2.7.* La definizione dei chiusi della topologia può essere fatta partendo anche solo da un semplice insieme  $E$  di elementi, infatti chiamato  $\mathfrak{E} = (E)$  l'ideale generato dagli elementi di  $E$ , si verifica facilmente che

$$\mathcal{V}(E) = \mathcal{V}(\mathfrak{E}). \quad (2.7)$$

Questo comporta dei vantaggi pratici, nel senso che preso un ideale finitamente generato  $\mathfrak{i} = (f_1, \dots, f_r)$  è possibile calcolare il chiuso  $\mathcal{V}(\mathfrak{i})$  come

$$\mathcal{V}(\{f_1, \dots, f_r\}) = \bigcap_{j=1}^r \mathcal{V}(f_j).$$

Dalla proposizione 2.6, si deduce immediatamente che per ogni ideale  $\mathfrak{i}$

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}}), \quad (2.8)$$

pertanto  $\mathcal{V}$  è una corrispondenza 1 a 1 tra i chiusi di  $\text{Spec } A$  e gli ideali radicali di  $A$ . È possibile costruire una mappa che ci consenta di passare dallo spettro all'anello

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \{\text{sottoinsiemi di } \text{Spec } A\} &\rightarrow \{\text{ideali di } A\} \\ X &\mapsto \mathcal{I}(X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Facilmente si può dimostrare che, come per le varietà, le mappe  $\mathcal{V}$  ed  $\mathcal{I}$  invertono le inclusioni

$$\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \text{ ideali di } A, \quad \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{j} \implies \mathcal{V}(\mathfrak{i}) \supseteq \mathcal{V}(\mathfrak{j}), \quad (2.10)$$

$$X, Y \subseteq \text{Spec } A, \quad X \subseteq Y \implies \mathcal{I}(X) \supseteq \mathcal{I}(Y). \quad (2.11)$$

La definizione di insieme chiuso irriducibile è analoga a quella valida per le varietà

**Definizione 2.8.** Un insieme  $X$ , chiuso di  $\text{Spec } A$ , si dice *irriducibile* se non esiste una decomposizione

$$X = X_1 \cup X_2, \quad X_1, X_2 \subsetneq X$$

come unione di due sottoinsiemi chiusi propri.

Analoga è anche la caratterizzazione dei chiusi irriducibili, e la dimostrazione ripercorre passo passo la dimostrazione della Proposizione 2.17

**Proposizione 2.8.**

$$X = \mathcal{V}(\mathfrak{J}) \text{ è irriducibile} \iff \sqrt{\mathfrak{J}} = \mathcal{I}(X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} \text{ è primo} \quad (2.12)$$

**Teorema 2.9.** *Sia  $A$  un anello Noetheriano. Allora*

1. *la topologia di Zariski su  $\text{Spec } A$  è Noetheriana;*
2. *ogni insieme chiuso  $X = \mathcal{V}(\mathfrak{I}) \in \text{Spec } A$  si decompone come unione finita di irriducibili*

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_k;$$

*se inoltre si richiede che  $\forall i, j, i \neq j, X_i \not\subseteq X_j$ , allora la decomposizione è unica.*

*Dimostrazione.* La topologia si dice Noetheriana se i suoi chiusi godono della proprietà delle catene discendenti. Consideriamo quindi una catena discendente

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_k \supset X_{k+1} \supset \dots$$

e applicando la mappa  $\mathcal{I}$  otteniamo una catena ascendente di ideali di  $A$

$$\mathcal{I}(X_1) \subset \mathcal{I}(X_2) \subset \dots \subset \mathcal{I}(X_k) \subset \mathcal{I}(X_{k+1}) \subset \dots$$

L'ipotesi di noetherianità di  $A$  ci assicura che la catena si stabilizza da un certo punto in poi, cioè  $\mathcal{I}(X_m) = \mathcal{I}(X_{m+1}) = \dots$ , quindi si stabilizza anche la catena dei chiusi  $X_m = X_{m+1} = \dots$

La seconda affermazione discende direttamente dalla prima, infatti se  $X$  è riducibile allora  $X = X_1 \cup X_2$ . Se  $X_1$  e  $X_2$  sono a loro volta riducibili, cerco una loro decomposizione e proseguo... così facendo viene generata una catena discendente che è destinata a stabilizzarsi e quindi la decomposizione deve essere finita.

Alternativamente si può considerare l'insieme  $\Sigma$  dei chiusi non decomponibili in finiti sottoinsiemi e far vedere che  $\Sigma = \emptyset$ . Supponiamo per assurdo che  $\Sigma \neq \emptyset$ : la noetherianità garantisce l'esistenza di un elemento minimale  $Y$  in  $\Sigma$ .  $Y$  deve essere riducibile, quindi decomponibile come  $Y = Y_1 \cup Y_2$ . Per la minimalità di  $Y$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$  non appartengono a  $\Sigma$ , ma allora sono decomponibili in finiti termini e quindi anche  $Y$  si può decomporre in modo finito, in contraddizione con l'ipotesi considerata. Possiamo quindi supporre che ogni chiuso si possa decomporre come

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r$$

per un certo  $r$  e, eliminando eventualmente gli  $X_i$  “superflui” abbiamo che per ogni  $i \neq j$ ,  $X_i \not\subseteq X_j$ . Quest’ultima osservazione ci garantisce l’unicità della decomposizione. Supponiamo che  $X$  si possa decomporre in due modi

$$\begin{aligned} X &= X_1 \cup \dots \cup X_r, \\ X &= Y_1 \cup \dots \cup Y_s. \end{aligned}$$

$X_1$  è contenuto in  $X$ , quindi è contenuto della seconda decomposizione:

$$X_1 \subseteq Y_1 \cup \dots \cup Y_s \implies X_1 = \bigcup_{i=1}^s (X_1 \cap Y_i).$$

L’irriducibilità di  $X_1$  implica l’esistenza di un  $Y_j$  tale che  $X_1 \subseteq Y_j$  e, riordinando le componenti irriducibili, possiamo supporre  $j = 1$ . Ripetendo lo stesso discorso su  $Y_1$ , abbiamo che

$$Y_1 \subseteq X_1 \cup \dots \cup X_r \implies Y_1 = \bigcup_{i=1}^r (Y_1 \cap X_i).$$

Dall’irriducibilità di  $Y_1$  e dal fatto che  $Y_1 \cap X_1 \neq \emptyset$ , si deduce  $Y_1 \subseteq X_1$ , quindi  $X_1 = Y_1$ . La dimostrazione si completa ripetendo lo stesso ragionamento su  $Z = X \setminus X_1 = X_2 \cup \dots \cup X_r = Y_2 \cup \dots \cup Y_s$ . ■

**Corollario 2.10.** *Sia  $A$  un anello Noetheriano e  $\mathfrak{i}$  un suo ideale. Allora*

1. *l’insieme degli ideali primi contenenti  $\mathfrak{i}$  ha un numero finito di elementi minimali;*
2.  *$\sqrt{\mathfrak{i}} = \bigcap \mathfrak{p}_k$  dove  $\mathfrak{p}_k$  sono gli elementi minimali definiti al punto 1.*
3. *se  $A$  ha zerodivisori,  $A$  contiene elementi nilpotenti oppure il numero di ideali primi minimali è maggiore uguale a 2.*

*Dimostrazione.* (1) Gli ideali primi contenenti  $\mathfrak{i}$  sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi chiusi irriducibili di  $\mathcal{V}(\mathfrak{i})$ . Gli elementi massimali degli irriducibili chiusi di  $\mathcal{V}(\mathfrak{i})$  sono finiti e quindi ho finiti elementi minimali nell’insieme dei primi contenenti  $\mathfrak{i}$ .

(2) Per la proposizione 2.6 sappiamo che il radicale di un ideale è calcolabile come intersezione dei primi contenenti l’ideale, ma per il punto 1 è sufficiente considerare gli elementi minimali.

(3) Supponiamo che  $A$  abbia zerodivisori. Se  $\text{nilrad } A \neq \emptyset$  allora  $A$  ha elementi nilpotenti, altrimenti  $(0) = \sqrt{(0)} = \text{nilrad } A$ . Esprimiamo  $(0)$  come intersezione sugli elementi minimali  $(0) = \bigcap \mathfrak{p}_j$ ; se l’elemento minimale è unico allora  $(0) = \mathfrak{p}$  primo, cioè  $A$  dovrebbe essere integro contro l’ipotesi iniziale. ■

Dato un omomorfismo di anelli  $\varphi : A \rightarrow B$ , abbiamo visto come questo induce una mappa  ${}^a\varphi : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  tra gli spettri. Questa mappa  ${}^a\varphi$  si comporta bene sulla topologia di Zariski, cioè risulta continua, infatti preso un chiuso  $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \in \text{Spec } A$ ,

$$({}^a\varphi)^{-1}(\mathcal{V}(\mathfrak{i})) = \mathcal{V}(\varphi(\mathfrak{i})).$$

Considerato  $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ , con  $f$  non nilpotente, abbiamo visto che la mappa  ${}^a\varphi : \text{Spec } A_f \rightarrow \text{Spec } A$ , indotta dal morfismo canonico  $A \rightarrow A_f$ , è un'iniezione. È immediato dimostrare che

$${}^a\varphi(\text{Spec } A_f) = \text{Spec } A \setminus \mathcal{V}(f)$$

in quanto  ${}^a\varphi(\text{Spec } A_f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$  e  $\mathcal{V}(f)$  contiene esattamente i primi scartati

$$\mathcal{V}(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f(\mathfrak{p}) = 0\}.$$

**Proprietà 2.11.** *Spec  $A_f$  è omeomorfo a  $\text{Spec } A \setminus \mathcal{V}(f)$ .*

**Lemma 2.12.** *Gli aperti di  $\text{Spec } A$  del tipo  $D_f = \text{Spec } A \setminus \mathcal{V}(f)$ , con  $f$  non nilpotente, sono detti aperti principali e formano una base di aperti per la topologia di Zariski.*

*Dimostrazione.* Preso un qualsiasi insieme  $E$ ,

$$\mathcal{V}(E) = \bigcap_{f \in E} \mathcal{V}(f)$$

pertanto un aperto qualsiasi

$$\text{Spec } A \setminus \mathcal{V}(E) = \text{Spec } A \setminus \bigcap_{f \in E} \mathcal{V}(f) = \bigcup_{f \in E} (\text{Spec } A \setminus \mathcal{V}(f))$$

si può esprimere come unione di aperti principali. ■

**Proposizione 2.13.** *Spec  $A$  è compatto.*

*Dimostrazione.* Preso un qualsiasi ricoprimento aperto di  $\text{Spec } A$ , ne vogliamo estrarre uno finito. Dal momento che gli aperti principali formano una base della topologia ci limitiamo a considerare un ricoprimento del tipo

$$\text{Spec } A = \bigcup_{\alpha} D_{f_{\alpha}}.$$

Possiamo scrivere

$$\bigcup_{\alpha} D_{f_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} (\text{Spec } A \setminus \mathcal{V}(f_{\alpha})) = \text{Spec } A \setminus \bigcap_{\alpha} \mathcal{V}(f_{\alpha}) = \text{Spec } A \setminus \mathcal{V}(\mathfrak{a}),$$

dove  $\mathfrak{a}$  è l'ideale generato dagli elementi  $f_\alpha$ . Affinché  $\bigcup_\alpha D_{f_\alpha}$  sia un ricoprimento, deve essere

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \emptyset \implies \mathfrak{a} = A;$$

Quindi anche 1 è esprimibile come combinazione lineare degli  $f_\alpha$ , cioè devono esistere  $f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_m}$  e  $g_1, \dots, g_m \in A$  tali che

$$g_1 f_{\alpha_1} + \dots + g_m f_{\alpha_m} = 1.$$

Osseviamo che per determinare una tale combinazione finita non è necessaria l'ipotesi di noetherianità dell'anello  $A$ . In conclusione

$$A = (f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_m}) \implies \text{Spec } A = D_{f_{\alpha_1}} \cup \dots \cup D_{f_{\alpha_m}} \quad \blacksquare$$

Come nel caso delle varietà affini, la topologia di Zariski su  $\text{Spec } A$  non è di Hausdorff, anzi ogni coppia di aperti non vuoti ha intersezione non vuota, cioè ogni aperto è denso in  $\text{Spec } A$ . In questo caso la topologia è addirittura più debole perché i punti dello spazio non sono tutti chiusi. Preso un ideale primo  $\mathfrak{p} \subset A$ , la sua chiusura infatti consiste nell'insieme di tutti i primi  $\mathfrak{p}'$  che lo contengono. Un punto  $\mathfrak{p}$  quindi è chiuso se e solo se l'ideale  $\mathfrak{p}$  è massimale. Per esempio, se  $A$  è un dominio di integrità, allora  $(0)$  è primo ed è contenuto in ogni altro primo di  $A$ , pertanto la sua chiusura è tutto lo spazio  $\text{Spec } A$ .

**Definizione 2.9.** Sia  $X$  uno spazio topologico al quale appartengono dei punti non chiusi. Dati  $x, y \in X$  si dice che  $x$  è una *specializzazione* di  $y$  se  $x$  appartiene alla chiusura di  $y$ . Un punto  $z$  si dice *punto generico* se ogni altro punto  $w$  di  $X$  è una sua specializzazione: questo significa che la chiusura di  $z$  coincide con tutto lo spazio  $X$ .

Nel caso di  $\text{Spec } A$ , abbiamo visto (Proposizione 2.5) che l'intersezione di tutti i primi corrisponde al nilradicale. Se  $\text{nilrad } A$  è primo, allora definisce un punto di  $\text{Spec } A$ , che è automaticamente punto generico.

**Proposizione 2.14.** *Spec  $A$  possiede un punto generico se e solo se il nilradicale di  $A$  è primo. Esso è unico ed è il punto definito da  $\text{nilrad } A$ .*

**Esempio 2.10.** Consideriamo l'anello

$$A = \frac{\mathbb{Z}[X]}{X^2 - 1} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sigma, \text{ con } \sigma^2 = 1.$$

Esso non contiene elementi nilpotenti, pertanto  $\text{nilrad } A = (0)$ , però l'ideale  $(0)$  non è primo: esistono infatti due zerodivisori,

$$(1 + \sigma)(1 - \sigma) = 1 - \sigma^2 = 0,$$

quindi  $\text{Spec } A$  non ha punti generici. Dimostreremo ora che la decomposizione in componenti irriducibili dello spettro di  $A$  è

$$\text{Spec } A = W_1 \cup W_2, \quad \text{dove } W_1 = \mathcal{V}(1 + \sigma) \text{ e } W_2 = \mathcal{V}(1 - \sigma).$$

Consideriamo i morfismi  $\varphi_1, \varphi_2 : A \rightarrow \mathbb{Z}$  tali che  $\ker \varphi_1 = (1 + \sigma)$  e  $\ker \varphi_2 = (1 - \sigma)$ . Cerchiamo di capire come opera, per esempio, il morfismo indotto sugli spettri  ${}^a\varphi_1$ : preso un ideale qualsiasi  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{Z}$  abbiamo

$${}^a\varphi_1(\mathfrak{p}) = \varphi_1^{-1}(\mathfrak{p})$$

e dal momento che  $0 \in \mathfrak{p}$ ,  ${}^a\varphi_1(\mathfrak{p}) \supseteq \ker \varphi_1 = (1 + \sigma)$ . I morfismi indotti risultano quindi essere omeomorfismi tra

$${}^a\varphi_1 : \text{Spec } \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{V}(1 + \sigma),$$

$${}^a\varphi_2 : \text{Spec } \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{V}(1 - \sigma),$$

e pertanto  $W_1$  e  $W_2$  sono irriducibili. L'intersezione di  $W_1$  e  $W_2$  è

$$W_1 \cap W_2 = \mathcal{V}(1 + \sigma) \cap \mathcal{V}(1 - \sigma) = \mathcal{V}(1 + \sigma, 1 - \sigma).$$

È possibile riscrivere  $\mathfrak{i} = (1 + \sigma, 1 - \sigma)$  come  $(2, 1 - \sigma)$ : preso un qualsiasi elemento del tipo  $(a_1 + a_2\sigma)(1 + \sigma) + (b_1 + b_2\sigma)(1 - \sigma)$  si ricava

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2\sigma)(1 + \sigma) + (b_1 + b_2\sigma)(1 - \sigma) = \\ & = (a_1 + a_2)(1 + \sigma) + (b_1 - b_2)(1 - \sigma) = \\ & = (a_1 + a_2 + b_1 - b_2) + (a_1 + a_2 - b_1 + b_2)\sigma = \\ & = 2(a_1 + a_2) + (-a_1 - a_2 + b_1 - b_2) + (a_1 + a_2 - b_1 + b_2)\sigma = \\ & = (a_1 + a_2)2 + (-a_1 - a_2 + b_1 - b_2)(1 - \sigma). \end{aligned}$$

Per capire di che oggetto di  $\text{Spec } A$  si tratta consideriamo il quoziente  $A/\mathfrak{a}$ : utilizzando il teorema di isomorfismo

$$A/\mathfrak{a} = \frac{\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 1)}{(2, 1 - X)/(X^2 - 1)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[X]}{(2, 1 - X, X^2 - 1)}$$

quindi  $X = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}$ ,

$$A/\mathfrak{a} \simeq \mathbb{Z}/(2) = \mathbb{Z}_2$$

$\mathfrak{a}$  è massimale quindi  $W_1 \cap W_2$  è un punto chiuso di  $\text{Spec } A$ .

L'ultima cosa da fare è caratterizzare gli elementi di  $\text{Spec } A$  mediante la mappa indotta dall'inclusione  $\phi : \mathbb{Z} \hookrightarrow A$ :

- per  $p = 2$  abbiamo un solo ideale primo corrispondente  ${}^a\phi((2)) = (2, 1 - \sigma)$ ;

- per  $p > 2$  primo, ci sono due ideali primi infatti utilizzando la decomposizione

$$p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

possiamo scrivere

$$p = \left(\left(\frac{p+1}{2}\right) + \left(\frac{p-1}{2}\right)\sigma\right) \left(\left(\frac{p+1}{2}\right) - \left(\frac{p-1}{2}\right)\sigma\right).$$

## 2.2 L'interpretazione geometrica

Ricordiamo preliminarmente che una varietà algebrica è definita come luogo degli zeri di un ideale di polinomi e che, dato un campo  $k$ , con  $V$  definiamo la mappa dall'insieme degli ideali di  $k[X_1, \dots, X_n]$  allo spazio affine  $k^n$  tale che

$$V(\mathfrak{j}) = \{P = (a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f(P) = 0, \forall f \in \mathfrak{j}\}, \quad (2.13)$$

e con  $I$  la mappa dai sottoinsiemi dello spazio affine agli ideali dell'anello dei polinomi tale che

$$I(Y) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall (a_1, \dots, a_n) \in Y\}. \quad (2.14)$$

Richiamiamo il teorema degli zeri di Hilbert

**Teorema 2.15** (Nullstellensatz). *Sia  $k$  un campo algebricamente chiuso.*

1. Ogni ideale massimale dell'anello dei polinomi  $A = k[X_1, \dots, X_n]$  è del tipo

$$\mathfrak{m}_P = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

per un qualche punto  $P = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ .

2. Dato un ideale  $\mathfrak{j} \subset A$ ,

$$\mathfrak{j} \neq (1) \implies V(\mathfrak{j}) \neq \emptyset.$$

3. Per ogni ideale  $\mathfrak{j} \subset A$

$$I(V(\mathfrak{j})) = \sqrt{\mathfrak{j}}.$$

Per una dimostrazione si veda [UAG, Cap. 3].

Si deduce immediatamente che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio affine e i punti dello spettro massimale dei polinomi su di esso

$$\begin{aligned} k^n &\xleftrightarrow{1:1} k[X_1, \dots, X_n] \\ (a_1, \dots, a_n) &\longleftrightarrow (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n), \end{aligned}$$

e si può dimostrare una proprietà più generale



**Proposizione 2.16.** Sia  $\mathfrak{j}$  un ideale di  $k[X_1, \dots, X_n]$  e sia  $A = k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{j}$ , l'anello delle coordinate della varietà  $V(\mathfrak{j})$  corrispondente. Esiste una corrispondenza biunivoca

$$V(\mathfrak{j}) \xleftrightarrow{1:1} \text{m-Spec } A.$$

*Dimostrazione.* Innanzitutto è noto che l'anello delle coordinate è un'algebra finitamente generata su  $k$  che possiamo esprimere come  $k[x_1, \dots, x_n]$  dove con  $x_i$  si intende l'immagine di  $X_i$  nel quoziente, cioè  $x_1 = X_1 \bmod \mathfrak{j}$ . Gli ideali di  $A$  derivano dagli ideali di  $k[X_1, \dots, X_n]$  che contengono  $\mathfrak{j}$ , quindi gli ideali massimali sono del tipo  $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$  tali che  $\mathfrak{j} \subset (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ . Un tale punto  $P = (a_1, \dots, a_n)$  appartiene agli zeri di  $\mathfrak{j}$  perché l'ideale massimale  $\mathfrak{m}_P = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$  non è altro che il nucleo della mappa di valutazione in  $P$ , pertanto

$$\mathfrak{j} \subset \mathfrak{m}_P \implies f(P) = 0, \forall f \in \mathfrak{j}.$$

La corrispondenza quindi è data da

$$(a_1, \dots, a_n) \longleftrightarrow (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n). \quad \blacksquare$$

Per quanto riguarda lo spettro primo dei polinomi, la caratterizzazione geometrica discende da una nota proprietà

**Proposizione 2.17.** Una varietà  $W$  è irriducibile se e solo se  $I(W)$  è un ideale primo.

*Dimostrazione.* ( $\implies$ ) Sia  $\mathfrak{i} = I(W) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ . Supponiamo che non sia primo, cioè che esistano due elementi  $f, g \notin \mathfrak{i}$  tali che  $fg \in \mathfrak{i}$ . Consideriamo gli ideali  $\mathfrak{j}_1 = (\mathfrak{i}, f)$  e  $\mathfrak{j}_2 = (\mathfrak{i}, g)$ , per cui vale

$$\mathfrak{i} \subsetneq \mathfrak{j}_1 \implies V(\mathfrak{j}_1) \subsetneq V(\mathfrak{i}) = W,$$

$$\mathfrak{i} \subsetneq \mathfrak{j}_2 \implies V(\mathfrak{j}_2) \subsetneq V(\mathfrak{i}) = W.$$

$fg \in \mathfrak{i}$  implica che  $W \subseteq V(\mathfrak{j}_1) \cup V(\mathfrak{j}_2)$ , da cui ricavo che

$$W = (V(\mathfrak{j}_1) \cap W) \cup (V(\mathfrak{j}_2) \cap W),$$

quindi  $W$  è riducibile.

( $\impliedby$ ) Supponiamo  $W = W_1 \cup W_2$  riducibile, cioè  $W_1, W_2 \subsetneq W$  da cui si ricava

$$I(W) \subsetneq I(W_1) \text{ e } I(W) \subsetneq I(W_2).$$

Considero allora  $f \in I(W_1) \setminus I(W)$  e  $g \in I(W_2) \setminus I(W)$ , ma  $fg$  si annulla su tutto  $W$  quindi  $fg \in I(W)$ .  $\blacksquare$

Possiamo allora dire che

$$\text{Spec } k[X_1, \dots, X_n] = \{\text{varietà irriducibili } X \in k^n\}.$$

ed vale la seguente proprietà

**Proposizione 2.18.** *Sia  $A = k[x_1, \dots, x_n]$  una  $k$ -algebra finitamente generata ( $k$  campo algebricamente chiuso). Allora esista una biezione tra*

$$\text{Spec } A \xrightarrow{1:1} \{\text{varietà irriducibili } X \subseteq V(\mathfrak{j})\}$$

dove  $\mathfrak{j}$  è l'ideale delle relazioni esistenti tra i generatori  $x_1, \dots, x_n$ .

*Dimostrazione.* Innanzitutto sappiamo che  $A = k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{j}$ , quindi gli ideali primi di  $A$  corrispondono agli ideali primi di  $k[X_1, \dots, X_n]$  contenuti in  $\mathfrak{j}$ . Pertanto posso esprimere un ideale primo  $\mathfrak{p}$  qualsiasi di  $A$  come

$$\mathfrak{p} = I(W) \text{ mod } \mathfrak{j},$$

dove  $W$  è una varietà irriducibile di  $k^n$  e  $\mathfrak{j} \subset I(W) \Rightarrow W \subset V(\mathfrak{j})$ . ■

## 2.3 Fasci

### 2.3.1 Definizione e proprietà elementari

**Definizione 2.11.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Un *prefascio*  $\mathcal{F}$  di anelli commutativi con unità su  $X$  consiste in:

- (a)  $\forall U \subseteq X$  aperto, un anello commutativo con unità  $\mathcal{F}(U)$ ;
- (b)  $\forall V \subseteq U$  aperti di  $X$ , esiste un morfismo di anelli commutativi con unità  $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  che rispetta le seguenti proprietà:
  1.  $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ ;
  2.  $\rho_{UU}$  è l'applicazione identità  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ ;
  3.  $\forall W \subseteq V \subset U$  aperti,  $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ .

$\mathcal{F}(U)$  si dice *sezione* di  $\mathcal{F}$  su  $U$ .  $\rho_{UV}$  viene detta *mappa restrizione* da  $U$  a  $V$  e si scrive

$$s \in \mathcal{F}(U), \quad \rho_{UV}(s) = s|_V.$$

**Definizione 2.12.** Un prefascio  $\mathcal{F}$  su uno spazio topologico  $X$  è detto *fascio* se soddisfa le seguenti ulteriori condizioni:

- 4. dato un aperto  $U$  e un suo ricoprimento aperto  $\{V_i\}_{i \in I}$ , se  $s \in \mathcal{F}(U)$  è un elemento tale che  $s|_{V_i} = \rho_{UV_i}(s) = 0, \forall i \in I$ , allora  $s = 0$ ;

5. sia  $U$  un aperto e  $\{V_i\}_{i \in I}$  un suo ricoprimento aperto. Se per ogni  $i \in I$  esiste  $s_i$  con la proprietà che  $\forall j, k, s_j|_{V_j \cap V_k} = s_k|_{V_j \cap V_k}$ , allora esiste un elemento  $s \in \mathcal{F}(U)$  tale che  $s_i = s|_{V_i}, \forall i \in I$ .

Preso un punto qualsiasi  $P \in X$ , l'insieme degli aperti contenenti  $P$  forma per costruzione un sistema diretto.

**Definizione 2.13.** Sia  $\mathcal{F}$  un prefascio su  $X$  e  $P$  un punto di  $X$ . Si definisce *spiga* di  $\mathcal{F}$  in  $P$  il limite diretto degli anelli  $\mathcal{F}(U)$  per gli  $U$  aperti contenenti  $P$  con le mappe di restrizione  $\rho$ :

$$\mathcal{F}_P = \varinjlim_{P \in U} \mathcal{F}(U). \quad (2.15)$$

Un elemento qualsiasi della spiga viene identificato da una coppia  $\langle U, s \rangle$  formata da un aperto  $U$  di  $X$  e da un elemento  $s$  dell'anello  $\mathcal{F}(U)$ . Due coppie  $\langle U, s \rangle$  e  $\langle V, t \rangle$  definiscono lo stesso elemento in  $\mathcal{F}_P$  se esiste un aperto  $W \subseteq U \cap V$  tale che  $s|_W = t|_W$ : gli elementi di  $\mathcal{F}_P$  sono quindi *germi* delle sezioni di  $\mathcal{F}$  in  $P$ .

**Definizione 2.14.** Siano  $(\mathcal{F}, \rho)$  e  $(\mathcal{G}, \sigma)$  due prefasci (fasci) di anelli sullo spazio topologico  $X$ . Un *morfismo* di prefasci (fasci)  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  consiste in un morfismo di anelli  $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U), \forall U \in X$ , tale che per ogni aperto  $V \subseteq U$  commuta il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{UV} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \sigma_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Un tale morfismo induce in maniera canonica un morfismo sulle spighe: preso un qualsiasi elemento della spiga  $\mathcal{F}_P$  esiste un suo rappresentante  $\langle U, s \rangle$ , applico ad  $s$   $\varphi(U)$  e poi mando la coppia  $\langle U, (\varphi(U))(s) \rangle$  nel limite diretto  $\mathcal{G}_P$ .

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathcal{F}(U), s \rangle & \xrightarrow{\varphi(U)} & \langle \mathcal{G}(U), (\varphi(U))(s) \rangle \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_P & \longrightarrow & \mathcal{G}_P \end{array}$$

Dato un morfismo  $\varphi$  di prefasci, si definiscono come al solito il *prefascio nucleo*, che associa ad ogni aperto  $U$  l'anello  $\ker(\varphi(U))$ , e il *prefascio immagine*, che associa ad ogni aperto  $U$  l'anello  $\text{im}(\varphi(U))$ . Se  $\varphi$  è un morfismo di fasci, il prefascio  $\ker(\varphi(U))$  è anche un fascio, cosa che non succede per il prefascio immagine. È possibile ovviare a questo inconveniente costruendo a partire da un prefascio, un fascio che lo "completa".

**Proposizione 2.19.** Dato un prefascio  $\mathcal{F}$ , esiste un fascio  $\mathcal{F}^+$  e un morfismo  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ , con la proprietà che per ogni altro fascio  $\mathcal{G}$  con associato un morfismo  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , è definito univocamente un morfismo  $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  tale che  $\varphi = \psi \circ \theta$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}^+ & \\ & \uparrow \theta & \searrow \psi \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \end{array}$$

La coppia  $(\mathcal{F}^+, \theta)$  è unica a meno di isomorfismi e  $\mathcal{F}^+$  si dice fascio associato al prefascio  $\mathcal{F}$ .

Si costruisce per ogni aperto  $U$  l'insieme delle funzioni

$$\mathcal{F}^+(U) = \left\{ s : U \rightarrow \bigcup_{P \in U} \mathcal{F}_P \right\}$$

tali che

- i)  $\forall P \in U, s(P) \in \mathcal{F}_P$ ;
- ii)  $\forall P \in U$ , esiste un aperto  $V$  di  $P$  contenuto in  $U$  e un elemento  $t \in \mathcal{F}(V)$ , tale che per ogni  $Q \in V$ , il germe  $t_Q$  di  $t$  in  $Q$  è uguale a  $s(Q)$ .

L'idea è quindi di "completare" il prefascio di partenza per fare in modo che le proprietà del fascio vengano realizzate, infatti dare un valore sulla spiga significa assegnare un valore su un intorno del punto e le condizioni poste garantiscono la compatibilità su tutto l'aperto di partenza.

Il morfismo  $\theta$  da  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^+$  è immediato, infatti per ogni aperto  $U$ , ogni elemento  $s \in \mathcal{F}(U)$  definisce un elemento nella spiga di ogni punto dell'aperto quindi

$$\begin{array}{ccc} \theta_U : \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^+(U) \\ s & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} s : U \rightarrow \bigcup_{P \in U} \mathcal{F}_P \\ Q \mapsto \langle U, s \rangle \in \mathcal{F}_Q \end{array} \right\} \end{array}$$

L'unicità discende immediatamente dalla definizione mediante la proprietà universale.

**Definizione 2.15.** Dato un fascio  $\mathcal{F}$  sullo spazio topologico  $X$ ,  $\mathcal{F}'$  è un sottofascio di  $\mathcal{F}$  se per ogni aperto  $U \subseteq X$ ,  $\mathcal{F}'(U)$  è un sottoanello di  $\mathcal{F}(U)$  e le mappe restrizione di  $\mathcal{F}'$  sono indotte dalle mappe di restrizione di  $\mathcal{F}$ .

**Definizione 2.16.** Dato un morfismo di fasci  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ :

- $\varphi$  è iniettivo se il sottofascio  $\ker \varphi$  di  $\mathcal{F}$  è nullo;
- $\varphi$  è suriettivo se il fascio associato al prefascio  $\text{im} \varphi$  coincide con  $\mathcal{G}$ .

Una successione di fasci

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

viene quindi detta esatta se per ogni  $i$ ,  $\ker \varphi_i = \text{im } \varphi_{i-1}$ .

Concludiamo il riepilogo sui fasci, guardando come possono essere trasportati da uno spazio topologico ad un altro mediante funzioni continue.

**Definizione 2.17.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua. Dato un fascio  $\mathcal{F}$  su  $X$ , si dice *fascio immagine diretta* il fascio  $f_*\mathcal{F}$  definito sugli aperti di  $Y$  come segue

$$\forall V \subset Y \text{ aperto}, \quad (f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)). \quad (2.16)$$

**Definizione 2.18.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua. Dato un fascio  $\mathcal{G}$  su  $Y$ , si dice *fascio immagine inversa* il fascio  $f^{-1}\mathcal{G}$  associato al prefascio

$$\forall U \subset X \text{ aperto}, \quad U \longmapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V). \quad (2.17)$$

Preso ad esempio un sottoinsieme  $Z$  di uno spazio topologico  $X$ , abbiamo la funzione continua di immersione  $i : Z \hookrightarrow X$ , pertanto dato un fascio  $\mathcal{F}$  su  $X$  possiamo costruire il fascio immagine inversa su  $Z$ : in questo caso si parla di fascio restrizione e si scrive  $\mathcal{F}|_Z$ .

### 2.3.2 Il fascio strutturale su $\text{Spec } A$

Considerato un anello  $A$ , costruiremo ora un fascio di anelli sullo spazio topologico  $\text{Spec } A$ . Per ogni aperto  $U$  di  $\text{Spec } A$  consideriamo l'insieme di funzioni

$$\mathcal{O}(U) = \left\{ s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \right\},$$

tali che

- $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}, \forall \mathfrak{p}$ ;
- $s$  è localmente un quoziente di elementi di  $A$ , cioè per ogni  $\mathfrak{p} \in U$ , devono esistere un intorno  $V$  di  $\mathfrak{p}$  e due elementi  $a, b \in A$  tali che, per ogni  $\mathfrak{q} \in V$ ,  $b \notin \mathfrak{q}$  e  $s(\mathfrak{q}) = a/b$ .

**Proposizione 2.20.** Per ogni non nilpotente  $f \in A$ ,  $\mathcal{O}(D_f) \simeq A_f$ . In particolare  $\Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}) \simeq A$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa  $\psi : A_f \rightarrow \mathcal{O}(D_f)$  che all'elemento  $a/f^n$  associa la funzione che manda ogni punto  $\mathfrak{p}$  di  $\mathcal{O}(D_f)$  nell'immagine di  $a/f^n$  in  $A_{\mathfrak{p}}$ . Dimosteremo che  $\psi$  è sia iniettiva che suriettiva.

Supponiamo che esistano due elementi  $a/f^n$  e  $b/f^m$  tali che  $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$ , cioè tali che  $\forall \mathfrak{p} \in D_f$ ,  $a/f^n$  e  $b/f^m$  definiscono lo stesso elemento in  $A_{\mathfrak{p}}$ . Deve quindi esistere  $h \notin \mathfrak{p}$  tale che

$$h(a f^m - b f^n) = 0 \text{ in } A.$$

$h$  appartiene all'annichilatore  $\mathfrak{a}$  di  $a f^m - b f^n$  e  $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$  per ogni  $\mathfrak{p} \in D_f$ , quindi  $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \cap D_f = \emptyset$ . Si deduce allora che  $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ , cioè esiste  $r$  tale che  $f^r$  appartiene all'annichilatore  $\mathfrak{q}$ :

$$f^r(a f^m - b f^n) = 0 \implies \frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m} \text{ in } A_f.$$

Consideriamo ora un elemento  $u \in \mathcal{O}(D_f)$  e ricopriamo  $D_f$  con degli aperti  $V_i$  sui quali  $u$  si può scrivere come quoziente

$$\frac{a_i}{g_i}, \text{ con } g_i \notin \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in V_i. \quad (2.18)$$

Pertanto  $V_i \subseteq D_{g_i}$  e supponendo  $V_i = D_{h_i}$  per qualche  $h_i$  si ricava

$$D_{h_i} \subseteq D_{g_i} \implies \mathcal{V}((h_i)) \supseteq \mathcal{V}((g_i)) \implies \sqrt{(h_i)} \subseteq \sqrt{(g_i)}.$$

Esiste  $k$  tale che  $h_i^k \in (g_i)$ , cioè  $h_i^k = c_i g_i$ , sostituendo nella (2.18)

$$u = \frac{c_i a_i}{h_i^k}.$$

Riscrivendo con  $c_i a_i \leftarrow a_i$  e  $h_i^k \leftarrow h_i$ , possiamo supporre che  $D_f$  sia ricoperto dagli aperti  $D_{h_i}$  sui quali  $u = a_i/h_i$ . Cerchiamo ora di estrarre un sottoricoprimento finito:

$$D_f \subseteq \bigcup D_{h_i} \implies \mathcal{V}(f) \supseteq \bigcap \mathcal{V}(h_i) = \mathcal{V}(\sum (h_i)) \implies \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{\sum (h_i)},$$

quindi esiste  $n$  tale che  $f^n$  si può scrivere come somma finita degli  $h_i$ ,  $f^n = \sum b_i h_i$ . Fissiamo quindi  $h_1, \dots, h_r$  tali che

$$f^n = \sum_{i=1}^r b_i h_i \quad \text{e} \quad D_f \subseteq D_{h_1} \cup \dots \cup D_{h_r}. \quad (2.19)$$

Per ogni  $i, j = 1, \dots, r$  sull'intersezione  $D_{h_i} \cap D_{h_j} = D_{h_i h_j}$  la funzione  $u$  ha due rappresentanti  $a_i/h_i$  e  $a_j/h_j$  che devono coincidere per l'iniettività

$$\begin{aligned} \frac{a_i}{h_i} &= \frac{a_j}{h_j} \text{ in } A_{h_i h_j} \implies \exists l \text{ t.c. } (h_i h_j)^l (a_i h_j - a_j h_i) = 0 \\ &\implies (h_i^l a_i) h_j^{l+1} - (h_j^l a_j) h_i^{l+1} = 0. \end{aligned}$$

Nuovamente semplifichiamo la notazione con  $h_i^l a_i \leftarrow a_i$ ,  $h_i^{l+1} \leftarrow h_i$ ,  $h_j^l a_j \leftarrow a_j$ ,  $h_j^{l+1} \leftarrow h_j$ : questo lascia invariato il rappresentante di  $u$  su ogni aperto  $D_{h_i}$  ed inoltre  $a_i h_j = a_j h_i$ ,  $\forall i, j$ . Consideriamo adesso l'elemento

$$a = \sum_{i=1}^r b_i a_i, \quad (2.20)$$

dove i coefficienti  $b_i$  sono gli stessi delle combinazione lineare (2.19), e calcoliamo su ogni  $d_{h_j}$  il prodotto  $ah_j$ :

$$\begin{aligned} ah_j &= \left( \sum b_i a_i \right) h_j = \sum b_i (a_i h_j) = \sum b_i (a_j h_i) = \\ &= \left( \sum b_i h_i \right) a_j = f^n a_j \implies \forall j, \frac{a}{f^n} = \frac{a_j}{h_j} \text{ su } D_{h_j}, \end{aligned}$$

cioè  $\psi(a/f^n) = u$  su ogni aperto  $D_{h_j}$ . Spec  $A$  può essere visto come l'aperto principale corrispondente a  $f = 1$ , quindi  $\Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}) \simeq A$ . ■

**Teorema 2.21.** *Dato un anello  $A$ , la famiglia di funzioni  $\mathcal{O}(U)$ , sugli aperti  $U$  dello spazio Spec  $A$ , forma un fascio di anelli.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione del teorema è limitata agli aperti principali. Che si tratti di un prefascio è evidente, riflettiamo brevemente sulle mappe di restrizione: consideriamo due aperti principali  $D_f$  e  $D_g$  tali che

$$D_g \subseteq D_f \implies \mathcal{V}(g) \supseteq \mathcal{V}(f) \implies \sqrt{(g)} \subset \sqrt{(f)};$$

esiste quindi  $n$  tale che  $g^n \in (f)$ , cioè  $g^n = cf$ . Utilizzando questa uguaglianza e tenendo conto che, per la proposizione precedente possiamo considerare la mappa restrizione  $\rho_{D_f D_g} : \mathcal{O}(D_f) \rightarrow \mathcal{O}(D_g)$  come mappa tra le localizzazioni  $A_f$  e  $A_g$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho_{D_f D_g} : A_f &\rightarrow A_g \\ \frac{a}{f^m} &\mapsto \frac{ac^m}{(g^n)^m} = \frac{ac^m}{g^{nm}}. \end{aligned}$$

Per dimostrare le ultime due condizioni nella definizione di fascio sugli aperti principali, è sufficiente la dimostrazione nel caso particolare  $U = \text{Spec } A$ ; consideriamo infatti un aperto principale  $D_f$  e un suo ricoprimento  $\{D_{f_\alpha}\}$ : mediante l'isomorfismo dato nella proprietà 2.11, possiamo ricondurci al caso particolare  $U = \text{Spec } A_f$  con il ricoprimento  $\{D_{\bar{f}_\alpha}\}$ , dove  $\bar{f}_\alpha$  è l'immagine di  $f$  in  $A_f$  mediante la naturale iniezione  $A \rightarrow A_f$ .

Consideriamo ora un elemento  $u \in \mathcal{O}(\text{Spec } A)$  e un ricoprimento  $\{U_\alpha = D_{f_\alpha}\}$  tali che  $\forall \alpha, u|_{U_\alpha} = 0$ . Questo significa che per ogni  $\alpha$  esiste un esponente  $n_\alpha$  tale che

$$f_\alpha^{n_\alpha} u = 0.$$

Gli aperti  $U_\alpha$  possono essere definiti anche a partire dagli elementi  $f_\alpha^{n_\alpha}$ , infatti  $\mathcal{V}(h) = \mathcal{V}(h^m)$ ,  $\forall h \in A$ ; dal fatto che gli aperti  $U_\alpha$  ricoprono tutto  $\text{Spec } A$ , abbiamo che l'ideale  $\mathfrak{a}$  generato dagli  $f_\alpha^{n_\alpha}$  coincide con  $A$ , pertanto posso scrivere 1 come combinazione di un numero finito di  $f_\alpha^{n_\alpha}$ . Siano quindi  $f_1, \dots, f_r$  e  $c_1, \dots, c_r \in A$  elementi tali che

$$1 = c_1 f_1^{n_1} + \dots + c_r f_r^{n_r}.$$

Moltiplicando per  $c_i$  l'equazione  $f_i^{n_i} u = 0$  e sommando sull'indice  $i$ , otteniamo

$$\sum_{i=1}^r c_i f_i^{n_i} u = \left( \sum_{i=1}^r c_i f_i^{n_i} \right) u = u = 0.$$

La dimostrazione dell'ultima proprietà della definizione di fascio ripercorre passo passo la dimostrazione della suriettività nella proposizione 2.20. ■

**Proposizione 2.22.** *Sia  $A$  un anello e sia  $\mathcal{O}$  il fascio su  $\text{Spec } A$ . Per ogni punto  $\mathfrak{p}$  di  $\text{Spec } A$*

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa  $\varphi$  di valutazione in  $\mathfrak{p}$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} &\rightarrow A_{\mathfrak{p}}, \\ s &\mapsto s(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

La mappa  $\varphi$  è iniettiva. Consideriamo un intorno aperto  $U$  di  $\mathfrak{p}$  e due sezioni  $s, t \in \mathcal{O}(U)$  tali che  $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$ . Possiamo supporre  $s(\mathfrak{p}) = \frac{a}{f}$  e  $s(\mathfrak{p}) = \frac{b}{g}$  (al più restringendo  $U$ ), con  $f, g \notin \mathfrak{p}$ . L'uguaglianza delle due frazioni in  $A_{\mathfrak{p}}$ , implica l'esistenza di un elemento  $h \notin \mathfrak{p}$  tale che

$$h(ag - bf) = 0.$$

L'uguaglianza  $\frac{a}{f} = \frac{b}{g}$  si conserva quindi su tutte gli anelli locali  $A_{\mathfrak{q}}$ , tali che  $f, g, h \notin \mathfrak{q}$ , quindi  $s$  e  $t$  coincidono su tutto l'aperto  $D_f \cap D_g \cap D_h$  e quindi definiscono lo stesso elemento nella spiga.

La mappa  $\varphi$  è anche suriettiva. Considero un elemento  $\frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{p}}$ ,  $f \notin \mathfrak{p}$  pertanto  $\mathfrak{p} \in D_f$ . Considero la sezione  $s$  definita dall'elemento  $\frac{a}{f}$  in  $\mathcal{O}(D_f)$  (per la proposizione 2.20)

$$s : D_f \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in D_f} A_{\mathfrak{p}}.$$

$D_f$  è un intorno di  $\mathfrak{p}$ , quindi la coppia  $\langle D_f, s \rangle$  definisce l'elemento nella spiga cercato. ■

**Definizione 2.19.** Il fascio  $\mathcal{O}$  viene detto *fascio strutturale* su  $\text{Spec } A$  e indicato con  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ . D'ora in avanti per spettro di un anello  $A$  si intenderà la coppia  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$ .

---



## 2.4 Spazi anellati

Abbiamo finora stabilito una corrispondenza tra anelli e coppie formate da uno spazio topologico e da un fascio su esso. Vorremmo che questa corrispondenza fosse funtoriale. Definiamo pertanto una nuova categoria.

**Definizione 2.20.** Uno *spazio anellato* consiste in una coppia  $(X, \mathcal{O}_X)$  formata da uno spazio topologico  $X$  e da un fascio di anelli  $\mathcal{O}_X$  su  $X$ .

**Definizione 2.21.** Un *morfismo* di spazi anellati da  $(X, \mathcal{O}_X)$  a  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  è una coppia  $(f, f^\sharp)$  tale che

$$f : X \rightarrow Y \quad (2.21)$$

è continua e

$$f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X \quad (2.22)$$

è un morfismo di fasci di anelli su  $Y$ .

**Definizione 2.22.** Uno spazio anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$  si dice *spazio localmente anellato* se  $\forall P \in X$ , la spiga  $\mathcal{O}_{X,P}$  è un anello locale. Un morfismo di spazi localmente anellati è un morfismo di spazi anellati  $(f, f^\sharp)$  tale che  $\forall P \in X$ , la mappa indotta da  $f^\sharp$  sulle spighe

$$f_P^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$$

è un omomorfismo locale di anelli locali.

Innanzitutto ricordiamo la definizione di omomorfismo locale. Dati due anelli locali  $A$  e  $B$  e chiamati  $\mathfrak{m}_A$  e  $\mathfrak{m}_B$  gli ideali massimali corrispondenti,  $\varphi : A \rightarrow B$  è un omomorfismo locale se  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$ . Riflettiamo ora sulle mappe indotte da  $f^\sharp$  sulle spighe: fissato un punto  $P \in X$  il morfismo  $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  definisce un morfismo di anelli per ogni intorno  $V$  di  $f(P)$ :

$$\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)).$$

$f^{-1}(V)$  è un intorno di  $P$ , pertanto ho una famiglia di funzioni tra intorni di  $f(P)$  e  $P$ , e posso passare al limite diretto

$$\left( \mathcal{O}_{Y,f(P)} = \varinjlim_V \mathcal{O}_Y(V) \right) \xrightarrow{f_P^\sharp} \left( \varinjlim_V \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) = \mathcal{O}_{X,P} \right).$$

Si definisce in modo naturale l'*isomorfismo* si spazi anellati. Un morfismo  $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  è un isomorfismo se e solo se  $f$  è un omeomorfismo tra gli spazi topologici e  $f^\sharp$  è un isomorfismo di fasci. Quindi deve esistere la funzione continua  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  e le applicazioni sui fasci

$$\begin{array}{ccc} f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X & & f^{-1\sharp} : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*^{-1}\mathcal{O}_Y \\ \mathcal{O}_Y(V) \mapsto \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) & & \mathcal{O}_X(U) \mapsto \mathcal{O}_Y(f(U)) \end{array}$$

sono tali che  $f^\# \circ f^{-1\#} = f^{-1\#} \circ f^\# = Id$ .

**Proposizione 2.23.** *Dato un anello  $A$ ,  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  è uno spazio localmente anellato.*

*Dimostrazione.*  $\text{Spec } A$  è uno spazio topologico,  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$  un fascio di anelli su  $\text{Spec } A$  e per la proposizione 2.22 le spighe del fascio sono anelli locali. ■

**Proposizione 2.24.** *Ogni morfismo di anelli  $\varphi : A \rightarrow B$  induce un naturale morfismo di spazi anellati*

$$(f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}).$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il morfismo  $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  definito a partire da  $\varphi$  come

$$\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } B, \quad f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}).$$

$f$  è continua e lo si dimostra considerando la controimmagine di un chiuso generico: per ogni ideale  $\mathfrak{a}$  di  $\text{Spec } A$ ,  $f^{-1}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \mathcal{V}(\varphi(\mathfrak{a}))$ .

( $\subseteq$ ) Sia  $\mathfrak{r} \in f^{-1}(\mathcal{V}(\mathfrak{a}))$ ,

$$\mathfrak{a} \subseteq f(\mathfrak{r}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{r}) \implies \varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{r} \implies \mathfrak{r} \in \mathcal{V}(\varphi(\mathfrak{a})).$$

( $\supseteq$ ) Sia  $\mathfrak{r} \in \mathcal{V}(\varphi(\mathfrak{a}))$ ,

$$\varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{r} \implies \mathfrak{a} \subseteq \varphi^{-1}\varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{r}) = f(\mathfrak{r}) \implies \mathfrak{r} \in f^{-1}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})).$$

Adesso per ogni  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ , localizziamo il morfismo  $\varphi$  considerando il morfismo di anelli locali  $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ . Componendo ora  $f$  e  $\varphi_{\mathfrak{p}}$  possiamo costruire un morfismo di fasci  $f^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\text{Spec } B}$ : sia  $V$  un aperto qualsiasi di  $\text{Spec } A$  e sia  $s : V \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in V} A_{\mathfrak{p}}$  un elemento di  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(V)$ , definiamo

$$f^\#(s) : f^{-1}(V) \rightarrow \coprod_{\mathfrak{q} \in f^{-1}(V)} B_{\mathfrak{q}}$$

$$P \mapsto \varphi_s(f(P)) \circ s \circ f.$$

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow{f^\#(s)} & \coprod_{\mathfrak{q} \in f^{-1}(V)} B_{\mathfrak{q}} \\ f \downarrow & & \uparrow \varphi_{\mathfrak{p}} \\ V & \xrightarrow{s} & \coprod_{\mathfrak{p} \in V} A_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

■

**Proposizione 2.25.** *Ogni morfismo locale di spazi localmente anellati*

$(f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  *è del tipo  $f = {}^a\varphi$ , dove  $\varphi : A \rightarrow B$  è un omomorfismo di anelli.*

*Dimostrazione.* Per ogni aperto  $V$  di  $\text{Spec } A$ ,  $f^\sharp$  definisce un morfismo di anelli tra  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(f^{-1}(V))$ . Se consideriamo come aperto  $V$  tutto lo spazio  $\text{Spec } A$  per la proposizione 2.11 viene definito un morfismo di anelli da  $A$  in  $B$ :

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} f^\sharp(\text{Spec } A) : A \rightarrow B.$$

Essendo  $(f, f^\sharp)$  un omomorfismo di spazi localmente anellati, abbiamo le mappe  $f_p^\sharp : \mathcal{O}_{\text{Spec } A, f(p)} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } B, p}$  definite sulle spighe che devono essere compatibili con le sezioni globali, cioè per la proposizione 2.22 deve commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{f(p)} & \xrightarrow{f_p^\sharp} & B_p \end{array}$$

Trattandosi di morfismo locale di anelli locali deve essere  $f(p) = \psi^{-1}(p)$  cioè  $f$  è proprio il morfismo indotto sugli spettri dal morfismo di anelli  $\psi$ . Ora è immediato vedere che anche il morfismo di fasci  $f^\sharp$  è indotto da  $\psi$  e dalle sue localizzazioni  $\psi_p$ . Sottolineiamo che l'ipotesi che  $(f, f^\sharp)$  sia un morfismo locale è fondamentale nella costruzione fatta, infatti la proposizione non vale nel caso di un morfismo di spazi anellati qualsiasi. ■

*La notion de schéma est la plus naturelle, la plus  
"évidente" imaginable, pour englober en une  
notion unique la série infinie de notions de "variété"  
(algébrique) qu'on maniait précédemment [...].  
L'idée même de schéma est d'une simplicité  
enfantine — si simple, si humble, que personne  
avant moi n'avait songé à se pencher si bas.*

Alexandre GROTHENDIECK **[R&S]**

# Capitolo 3

## Schemi

### 3.1 Definizioni

Introduciamo ora una serie di definizioni di base sugli schemi. Per una trattazione più estesa dell'argomento si veda il Capitolo III, Sezione 3 di [Hart].

**Definizione 3.1.** Uno *schema affine* è uno spazio localmente anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$  isomorfo allo spettro di un qualche anello.

**Definizione 3.2.** Uno *schema* è uno spazio localmente anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$  tale che per ogni punto di  $X$  esiste un aperto  $U$  tale che lo spazio topologico  $U$  con il fascio restrizione  $\mathcal{O}_X|_U$  è uno schema affine.

**Definizione 3.3.** Uno schema  $(X, \mathcal{O}_X)$  si dice

- *connesso* se lo spazio topologico  $X$  è connesso;
- *irriducibile* se lo spazio topologico  $X$  è connesso;
- *ridotto* se per ogni aperto  $U$ , l'anello  $\mathcal{O}_X(U)$  è privo di elementi nilpotenti. In modo equivalente uno schema è ridotto se la spiga di ogni punto è priva di nilpotenti;
- *intero* se per ogni aperto  $U$ , l'anello  $\mathcal{O}_X(U)$  è un dominio di integrità;
- *localmente noetheriano* se  $X$  può essere ricoperto da un insieme di aperti  $\{\text{Spec } A_i\}$  e per ogni  $i$ ,  $A_i$  è un anello noetheriano;
- *noetheriano* se è localmente noetheriano ed esiste un ricoprimento aperto  $\{\text{Spec } A_i\}$  con un numero finito di elementi, cioè lo schema risulta essere compatto.

Per non appesantire la notazione, d'ora in poi si scriverà  $X$  per indicare lo schema  $(X, \mathcal{O}_X)$ , in tutte le situazioni in cui questa scelta non comporta ambiguità.

**Definizione 3.4.** Dato uno schema  $X$ , un *sottoschema* aperto  $U$  di  $X$  è uno schema tale che  $U$  è un sottoinsieme aperto dello spazio topologico  $X$  e il fascio strutturale  $\mathcal{O}_U$  è isomorfo alla restrizione a  $U$  del fascio strutturale  $\mathcal{O}_X$ , indotta dalla mappa  $i : U \hookrightarrow X$ :

$$\mathcal{O}_U = i^{-1}\mathcal{O}_X.$$

Un morfismo  $f : Y \rightarrow X$  si dice *immersione aperta* se l'immagine di  $Y$  mediante  $f$  è isomorfa ad un sottoschema aperto di  $X$ .

**Definizione 3.5.** Si dice *immersione chiusa* dallo schema  $Y$  allo schema  $X$ , un morfismo  $f : Y \rightarrow X$  tale che  $f$  induce un omeomorfismo di spazi topologici tra  $f(Y)$  e un sottoinsieme chiuso di  $X$  e tale che il morfismo di fasci  $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$  è suriettivo. Un *sottoschema chiuso* è una classe di equivalenza tra immersioni chiuse, definita dalla relazione di equivalenza seguente: due immersioni chiuse  $f : Y \rightarrow X$  e  $g : Z \rightarrow X$  si dicono equivalenti se esiste un isomorfismo  $\varphi : Y \rightarrow Z$  tale che  $g = f \circ \varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & X \end{array}$$

### 3.1.1 Schemi proiettivi

Fino a questo momento abbiamo costruito oggetti analoghi alle varietà affini, introduciamo ora la classe di schemi legata agli anelli graduati che fornisce il formalismo per lavorare con l'analogo delle varietà proiettive. Sia  $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$  un anello gradutato e sia  $S_+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$  l'insieme degli elementi di grado strettamente positivo.

**Definizione 3.6.** Dato un anello gradutato  $S$ , si definisce come  $\text{Proj } S$  l'insieme

$$\text{Proj } S = \{ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \subsetneq S_+ \text{ è un ideale omogeneo primo di } S \}. \quad (3.1)$$

La topologia di Zariski è definita mediante la famiglia di chiusi

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Proj } S \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \}$$

e la verifica che si tratta effettivamente di una topologia è analoga alla verifica fatta nel caso dello spettro (Proposizione-Definizione 2.7). Anche la costruzione del fascio strutturale è analoga al caso affine. Innanzitutto per ogni  $\mathfrak{p} \in$

$\text{Proj } S$ , consideriamo l'anello  $S_{(\mathfrak{p})}$  formato dagli elementi di grado 0 nell'anello localizzato  $T^{-1}S$ , dove  $T$  è il sistema moltiplicativo formato dagli elementi omogenei di  $S \setminus \mathfrak{p}$ :

$$S_{(\mathfrak{p})} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in S, b \in S \setminus \mathfrak{p}, \deg a = \deg b \right\}.$$

A questo punto per ogni aperto  $U \subseteq \text{Proj } S$ , consideriamo l'insieme delle funzioni

$$\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(U) = \left\{ s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})} \right\} \quad (3.2)$$

tali che la valutazione di  $s$  nel punto  $\mathfrak{p}$  appartiene all'anello  $S_{(\mathfrak{p})}$  e tale che  $s$  sia localmente un quoziente, cioè per ogni punto  $\mathfrak{p} \in U$  devono esistere un aperto  $V$  e due elementi omogenei  $a$  e  $b$  dello stesso grado tali che, per ogni  $\mathfrak{q} \in V$ ,  $b$  non appartiene a  $S_{(\mathfrak{q})}$  e  $s(\mathfrak{q}) = a/b$ .

**Proposizione 3.1.** *Dato un anello graduato  $S$ , la coppia  $(\text{Proj } S, \mathcal{O}_{\text{Proj } S})$  è uno schema.*

*Dimostrazione.* Per prima cosa bisogna far vedere che  $(\text{Proj } S, \mathcal{O}_{\text{Proj } S})$  è uno spazio localmente anellato; si dimostra che per ogni  $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$ , la spiga  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  è isomorfa all'anello locale  $S_{(\mathfrak{p})}$  e la dimostrazione è analoga al caso affine (Proposizione 2.22).

Ora bisogna dimostrare che per ogni punto di  $\text{Proj } S$  esiste un aperto isomorfo ad uno schema affine. Per fare ciò costruiamo un ricoprimento di  $\text{Proj } S$  formato da aperti isomorfi a spettri di anello; consideriamo  $\forall f \in S_+$ ,

$$D_+(f) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Proj } S \mid f \notin \mathfrak{p} \}.$$

È immediato verificare che  $D_+(f)$  è un aperto infatti  $D_+(f) = \text{Proj } S \setminus \mathcal{V}((f))$ , inoltre dal momento che i punti di  $\text{Proj } S$  corrispondono agli ideali omogenei che non coincidono con  $S_+$ , al variare di  $f$  questi aperti ricoprono lo spazio topologico  $\text{Proj } S$ .

Fissato ora  $f \in S_+$ , costruiamo un isomorfismo tra  $D_+(f)$  e  $\text{Spec } S_{(f)}$ , dove con  $S_{(f)}$  viene indicato il sottoanello di  $S_f$  formato dagli elementi omogenei di grado 0. Definiamo il morfismo sugli spazi topologici a partire dal morfismo canonico  $S \rightarrow S_f$ : per ogni ideale omogeneo  $\mathfrak{a} \subseteq S$ ,  $\varphi(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}S_f) \cap S_{(f)}$ . Restringendoci agli ideali che non contengono  $f$ ,  $\varphi$  rappresenta una mappa da  $D_+(f)$  in  $\text{Spec } S_{(f)}$  che risulta biettiva per le proprietà della localizzazione. Si tratta di un omeomorfismo perché se  $\mathfrak{a}$  è un ideale omogeneo e  $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$ ,  $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$  se e solo se  $\varphi(\mathfrak{p}) \supseteq \varphi(\mathfrak{a})$ .

C'è un isomorfismo canonico tra gli anelli locali  $S_{(\mathfrak{p})}$  e  $(S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})}$  infatti il generico elemento di  $(S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})}$  è la frazione  $x/y$ , dove  $x$  appartiene a  $S_{(f)}$ ,

quindi

$$x = \frac{a}{f^k}, \quad \text{con } \deg a = k,$$

mentre  $y$  appartiene a  $S_{(f)} \setminus \varphi(\mathfrak{p}) = S_{(f)} \setminus (\mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)})$ , cioè

$$y = \frac{b}{f^h}, \quad \text{con } b \notin \mathfrak{p} \text{ e } \deg b = h;$$

pertanto

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{f^k}}{\frac{b}{f^h}} = \frac{af^h}{bf^k}$$

è un elemento omogeneo di grado 0 e dal momento che  $f \notin \mathfrak{p}, bf^h \in S \setminus \mathfrak{p}$ , cioè

$$\frac{x}{y} \in S_{(\mathfrak{p})}.$$

L'isomorfismo sulle spighe induce quindi un isomorfismo  $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}} \rightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_{\text{Proj } S|_{D_+(f)}})$ . La generica sezione  $s$  di  $\mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}}(U)$  viene mandata nella sezione  $\varphi^\sharp(s)$  in  $\varphi_*(\mathcal{O}_{\text{Proj } S|_{D_+(f)}})(\varphi^{-1}(U))$  mediante il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Pi(S_{(f)})_{\mathfrak{q}} & \xrightarrow{\sim} & \Pi S_{(\varphi^{-1}(\mathfrak{q}))} \\ s \uparrow & & \uparrow \varphi^\sharp(s) \\ U & \xleftarrow{\sim} & \varphi^{-1}(U) \end{array}$$

La coppia  $(\varphi, \varphi^\sharp)$  è quindi l'isomorfismo di spazi localmente anellati cercato. ■

**Definizione 3.7.** Fissato un anello  $A$ , definiamo lo *spazio proiettivo* di dimensione  $n$  su  $A$  lo schema

$$\mathbb{P}_A^n = \text{Proj } A[X_0, \dots, X_n] \tag{3.3}$$

con il suo fascio strutturale. Uno *schema proiettivo* è quindi uno schema che può essere immerso in un certo spazio proiettivo  $\mathbb{P}_A^n$ .

### 3.1.2 Il prodotto fibrato

Costruiamo ora il *prodotto fibrato* di due schemi. In generale, dati tre insiemi  $X, Y$  ed  $S$  e due mappe  $\varphi : X \rightarrow S$  e  $\psi : Y \rightarrow S$  si può definire il prodotto  $X \times_S Y$  come l'insieme

$$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \varphi(x) = \psi(y)\}.$$



Sono definite in modo canonico le proiezioni sui fattori  $\pi_X$  e  $\pi_Y$  che rendono commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times_S Y & \\
 \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\
 X & \circlearrowleft & Y \\
 \varphi \searrow & & \swarrow \psi \\
 & S &
 \end{array} \tag{3.4}$$

Come al solito vogliamo che il prodotto  $X \times_S Y$  sia il “miglior oggetto” dotato di due mappe sui fattori  $X$  e  $Y$ , quindi lo dotiamo di proprietà universale, definita in maniera categoriale nel seguente modo: il prodotto fibrato  $X \times_S Y$  è l’oggetto finale della categoria che ha come oggetti le terne  $(Z, f : Z \rightarrow X, g : Z \rightarrow Y)$  e come morfismi tra due oggetti qualsiasi  $(Z_1, f_1, g_1)$  e  $(Z_2, f_2, g_2)$  le mappe  $\lambda : Z_1 \rightarrow Z_2$  tali che  $f_1 = f_2 \circ \lambda$  e  $g_1 = g_2 \circ \lambda$ . Quindi considerato un qualsiasi insieme  $Z$  con due mappe  $f : Z \rightarrow X$  e  $g : Z \rightarrow Y$ , esiste un’unica mappa  $\lambda : Z \rightarrow X \times_S Y$  tale che il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc}
 Z & & \\
 \lambda \searrow & & \searrow g \\
 & X \times_S Y & \longrightarrow Y \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & X & \longrightarrow S
 \end{array} \tag{3.5}$$

**Definizione 3.8.** Siano  $X$  e  $Y$  due schemi su  $S$ , cioè dotati dei morfismi  $\varphi : X \rightarrow S$  e  $\psi : Y \rightarrow S$ . Definiamo *prodotto fibrato* degli schemi  $X$  e  $Y$  lo schema  $X \times_S Y$  dotato di due morfismi  $\pi_X$  e  $\pi_Y$  che rende commutativo il diagramma (3.4) e tale che per ogni altro schema  $Z$  con due morfismi su  $X$  e  $Y$ , esiste un morfismo  $\lambda : Z \rightarrow X \times_S Y$  che rende commutativo il diagramma (3.5).

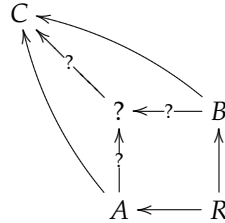
**Lemma 3.2.** Siano  $X, Y$  e  $S$  schemi affini. Siano  $\varphi : X \rightarrow S$  e  $\psi : Y \rightarrow S$  due morfismi di schemi. Allora il prodotto fibrato  $X \times_S Y$  esiste ed è unico a meno di isomorfismo.

*Dimostrazione.* Per ipotesi possiamo scrivere

$$X = \text{Spec } A, \quad Y = \text{Spec } B, \quad S = \text{Spec } R,$$

ed inoltre sappiamo dalla Proposizione 2.25 che esistono due morfismo di anelli  $f : R \rightarrow A$  e  $g : R \rightarrow B$  tali che  $^a f = \varphi$  e  $^a g = \psi$ , quindi possiamo interpretare  $A$  e  $B$  come  $R$ -moduli. Consideriamo ora un ulteriore schema affine  $Z = \text{Spec } C$

con due mappe  $\phi_X : Z \rightarrow X$  e  $\phi_Y : Z \rightarrow Y$ , anche in questo caso esistono due omomorfismi di anelli  $h_A : A \rightarrow C$  e  $h_B : B \rightarrow C$  tali che  ${}^a h_A = \phi_X$  e  ${}^a h_B = \phi_X$ . In pratica abbiamo il diagramma



Combinando gli omomorfismi  $h_A$  e  $h_B$ , possiamo costruire un morfismo bilineare da  $\lambda : A \times B \rightarrow C$

$$\lambda : (a, b) \mapsto h_A(a)h_B(b) \in C,$$

pertanto la ricerca di un oggetto finale tra gli schemi, in questo caso è equivalente a trovare un oggetto iniziale nella categoria degli  $R$ -moduli. L'oggetto cercato è quindi il prodotto tensoriale degli anelli  $A$  e  $B$  su  $R$ :

$$X \times_S Y = \text{Spec}(A \otimes_R B).$$

L'unicità del prodotto fibrato  $X \times_S Y$  discende direttamente dall'unicità del prodotto tensoriale  $A \otimes_R B$ . ■

**Proposizione 3.3.** *Siano  $X$  e  $Y$  schemi qualsiasi sullo schema arbitrario  $S$ .  $X \times_S Y$  esiste ed è unico a meno di isomorfismi.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione seguente presenta l'idea di fondo e non è rigorosa in tutti i dettagli. Per una dimostrazione precisa si veda [Hart, Cap. III, Th. 3.3]. Cominciamo con il considerare  $X$  schema arbitrario e  $Y$  e  $S$  schemi affini. Per definizione di schema, esiste un ricoprimento aperto  $\{X_i\}$  di  $X$ , con  $X_i = \text{Spec } A_i$ . Consideriamo quindi uno schema  $Z$  e due morfismi  $f : Z \rightarrow X$  e  $g : Z \rightarrow Y$  e definiamo  $Z_i = f^{-1}(X_i)$  e  $f_i$  la composizione  $Z_i \hookrightarrow Z \xrightarrow{f} X_i$ . Dal momento che  $X_i$  è affine so che il prodotto  $X_i \times_S Y$  è ben definito ed esiste un morfismo  $\lambda_i : Z_i \rightarrow X_i \times_S Y$  tale che  $f_i = \pi_{X_i} \circ \lambda_i$  e  $g|_{Z_i} = \pi_Y \circ \lambda_i$ . Sfruttando il fatto che sulle intersezioni  $X_i \cap X_j$  tutto è ben definito e non vi sono ambiguità, costruisco il prodotto  $X \times_S Y$  incollando tra loro i vari pezzi, cioè per ogni  $i, j$  tali che  $X_i \cap X_j \neq \emptyset$

$$f_i|_{Z_i \cap Z_j} = f_j|_{Z_i \cap Z_j}, \quad \pi_{X_i}|_{X_i \cap X_j} = \pi_{X_j}|_{X_i \cap X_j}$$

quindi posso considerare

$$X_{ij} \times_S Y = \left( \frac{X_i \amalg X_j}{X_i \cap X_j} \right) \times_S Y.$$

e procedere fino a ricoprire tutto  $X$ . Ripetendo lo stesso ragionamento con un ricoprimento affine di  $Y$ , si dimostra che il prodotto fibrato è definito per  $X$  e  $Y$  schemi generici. Per estendere il prodotto ad uno schema  $S$  generico, dati morfismi  $f : X \rightarrow S$  e  $g : Y \rightarrow S$ , consideriamo un ricoprimento aperto  $\{S_i\}$  e le controimmagini  $\{X_i = f^{-1}(S_i)\}, \{Y_i = g^{-1}(S_i)\}$ . Per ogni aperto affine  $S_i$  è definito il prodotto  $X_i \times_{S_i} Y_i$ . Questo prodotto coincide con il prodotto di  $X_i$  e  $Y$  su  $S$ , infatti preso uno schema  $Z$  con due morfismi  $h_1 : Z \rightarrow X_i$  e  $h_2 : Z \rightarrow Y$ , abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 h_1 \swarrow & & \searrow h_2 \\
 X_i & & Y \\
 f \searrow & & \swarrow g \\
 & S &
 \end{array}$$

da cui deduciamo che  $h_2(Z) \subseteq g^{-1}(f(X_i)) = g^{-1}(S_i) = Y_i$ . Nuovamente incollando i vari  $X_i$ , compatibili sulle intersezioni, ottengo il prodotto  $X \times_S Y$  per  $X, Y$  ed  $S$  schemi qualsiasi. ■

Sia ora  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo di schemi e sia  $y \in Y$  un punto. Chiamiamo  $k(y)$  il campo residuo di  $y$  e  $\varphi_y$  il morfismo canonico da  $\text{Spec } k(y)$  in  $Y$ . Come è fatto questo morfismo? Per definizione, sappiamo che esiste un aperto  $U \subseteq Y$  di  $y$  tale che  $U = \text{Spec } A$ ; il campo residuo non è altro che il campo delle frazioni del dominio di integrità  $A/y$ , pertanto abbiamo il morfismo canonico  $A \rightarrow A/y \hookrightarrow k(y)$  che induce un morfismo  $\text{Spec } k(y) \rightarrow \text{Spec } A \hookrightarrow Y$ .  $X$  e  $\text{Spec } k(y)$  sono due schemi su  $Y$ , quindi possiamo considerare lo schema  $X_y = X \times_Y \text{Spec } k(y)$ .  $X_y$  si dice *fibra* del morfismo  $f$  sul punto  $y$  e può essere considerato come schema su  $\text{Spec } k(y)$ . Questa costruzione è molto importante perché permette di interpretare i morfismi come famiglie di schemi (le fibre, appunto). Viceversa una famiglia di schemi può essere “associata” ad un morfismo.

**Definizione 3.9.** Sia  $X_0$  uno schema su un campo  $k$ . Si dice *famiglia di deformazioni* di  $X_0$  un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  tale che esiste un punto  $y_0 \in Y$  per cui il campo residuo  $k(y_0)$  coincide con  $k$  e la fibra di  $f$  su  $y_0$  è isomorfa a  $X_0$ :

$$X_0 \simeq X_{y_0} = X \times_Y \text{Spec } k.$$

Ogni fibra  $X_y$  di  $f$  viene detta *deformazione* di  $X_0$ .

Altra applicazione del prodotto fibrato è il concetto di estensione di base. Fissiamo uno *schema base*  $S$  e consideriamo la categoria degli schemi su  $S$ . Dato

un secondo schema base  $S'$ , con un morfismo  $S' \rightarrow S$ , il prodotto fibrato ci consente di passare dalla categoria degli schemi su  $S$  alla categoria degli schemi su  $S'$ , effettuando un'estensione di base. Preso uno schema  $X$  su  $S$  possiamo considerare lo schema  $X' = X \times_S S'$  che con il morfismo proiezione risulta essere uno schema su  $S'$ :

$$\begin{array}{ccc} X \times_S S' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

**Esempio 3.10.** Fissato un campo  $k$ , consideriamo gli schemi

$$X = \text{Spec} \frac{k[x, y, z]}{(xy - z)}, \quad Y = \text{Spec} k[z].$$

$X$  è uno schema su  $Y$  e il morfismo  $f : X \rightarrow Y$  è quello indotto dal morfismo canonico

$$\varphi : k[z] \xrightarrow{z \mapsto z} k[x, y, z] \longrightarrow \frac{k[x, y, z]}{(xy - z)}.$$

I punti chiusi di  $\text{Spec} k[z]$  corrispondono agli ideali massimali cioè ai punti di  $k$ . Per ogni punto chiuso  $a$  di  $\text{Spec} k[z]$ , il campo residuo  $k(a)$  coincide con il campo  $k$  e il morfismo  $\text{Spec} k \rightarrow \text{Spec} k[t]$  è quello indotto dalla valutazione in  $a$

$$\begin{aligned} k[t] &\rightarrow k, \\ f(t) &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Consideriamo quindi il prodotto fibrato  $X_a = X \times_Y \text{Spec} k$ . Per  $a \neq 0$  otteniamo l'iperbole irriducibile di equazione  $xy - a = 0$ , per  $a = 0$  invece otteniamo lo schema riducibile  $xy = 0$  composto da due rette. Possiamo quindi interpretare  $X_0$  come deformazione delle iperboli  $xy - a = 0$ .

## 3.2 Fasci coerenti

Definiamo ora una famiglia di fasci su uno spazio localmente anellato che consente di rendere ancora più generali gli strumenti fin qui introdotti.

**Definizione 3.11.** Sia  $(X, \mathcal{O}_X)$  uno spazio anellato. Un fascio di  $\mathcal{O}_X$ -moduli (o più brevemente un  $\mathcal{O}_X$ -modulo) è un fascio  $\mathcal{F}$  su  $X$  tale che

- $\forall U \subseteq X$  aperto,  $\mathcal{F}(U)$  è un  $\mathcal{O}_X(U)$ -modulo;

- $\forall V \subseteq U$  aperti, la mappa restrizione  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  è compatibile con la mappa restrizione  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  e con la struttura di modulo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Un morfismo di  $\mathcal{O}_X$ -moduli  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  è un morfismo di fasci tale che per ogni aperto  $U$  il morfismo indotto  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  è un morfismo di  $\mathcal{O}_X(U)$ -moduli.

Possiamo estendere il prodotto tensoriale di moduli a questo tipo di fasci. Dati due  $\mathcal{O}_X$ -moduli  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$ , si definisce *prodotto tensoriale*  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  il fascio associato al prefascio

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U), \quad \forall U \subseteq X.$$

**Definizione 3.12.** Un  $\mathcal{O}_X$ -modulo  $\mathcal{F}$  si dice *libero* se è la somma diretta di copie di  $\mathcal{O}_X$ .  $\mathcal{F}$  è *localmente libero* se esiste un ricoprimento  $\{U_\alpha\}$  di  $X$  tale che, per ogni  $\alpha$ ,  $\mathcal{F}(U_\alpha)$  è un  $\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$ -modulo libero. In quest'ultimo caso, si dice *rango* di  $\mathcal{F}$  sull'aperto  $U_\alpha$  il numero di copie di  $\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$  che compongono  $\mathcal{F}(U_\alpha)$ . Come al solito la connessione di  $X$  garantisce che il rango sia costante su ogni aperto del ricoprimento. Se il rango del fascio  $\mathcal{F}$  è 1,  $\mathcal{F}$  si dice *fascio invertibile*.

Preso ora un anello  $A$  e un  $A$ -modulo  $M$ , costruiamo un  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -modulo a partire da  $M$ . Per ogni primo  $\mathfrak{p}$ , definiamo il modulo localizzato in  $\mathfrak{p}$  il modulo

$$M_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{m}{a} \mid m \in M \text{ e } a \in A \setminus \mathfrak{p} \right\},$$

nel quale abbiamo identificato gli elementi  $\frac{m_1}{a_1}$  e  $\frac{m_2}{a_2}$  tali che esiste  $b \in A \setminus \mathfrak{p}$  per cui  $b(a_2m_1 - a_1m_2) = 0$ . Quindi costruiamo il fascio  $\tilde{M}$  che ad ogni aperto  $U$  di  $\text{Spec } A$ , associa le funzioni

$$\tilde{M}(U) = \left\{ s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} \right\}, \quad (3.6)$$

tali che (analogamente alla costruzione del fascio strutturale)

1.  $\forall \mathfrak{p} \in U, s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$ ;
2.  $s$  è localmente un quoziente, cioè  $\forall \mathfrak{p} \in U$ , devono esistere un intorno  $V$  e due elementi  $m \in M$  e  $a \in A$ , tali che per ogni  $\mathfrak{q} \in V, a \notin \mathfrak{q}$  e  $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{a}$ .

**Proposizione 3.4.** Sia  $A$  un anello,  $M$  un  $A$ -modulo e  $\tilde{M}$  il fascio su  $\text{Spec } A$  associato ad  $M$ . Allora

1.  $\tilde{M}$  è un  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -modulo;
2.  $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ , la spiga  $\tilde{M}_{\mathfrak{p}}$  è isomorfa al modulo localizzato  $M_{\mathfrak{p}}$ ;
3.  $\forall f \in A$ ,  $\tilde{M}(D_f)$  è isomorfo al modulo localizzato  $M_f$ ;
4.  $\Gamma(\text{Spec } A, \tilde{M}) \simeq M$ .

*Dimostrazione.* La 1. discende direttamente dalla costruzione di  $\tilde{M}$ . Per dimostrare gli isomorfismi 2., 3. e 4. basta apportare le opportune modifiche alle dimostrazioni delle Proposizioni 2.22 e 2.20. ■

**Definizione 3.13.** Sia  $(X, \mathcal{O}_X)$  uno schema e sia  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -modulo.  $\mathcal{F}$  si dice *fascio quasi-coerente* se esiste un ricoprimento aperto  $\{U_i = \text{Spec } A_i\}$  e, per ogni  $i$ , esiste un  $A_i$ -modulo  $M_i$ , tale che  $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \tilde{M}_i$ . Se inoltre per ogni  $i$ ,  $M_i$  è un modulo su  $A_i$  finitamente generato,  $\mathcal{F}$  si dice *fascio coerente*.

### 3.2.1 Fasci associati a moduli graduati

Ripetiamo ora la costruzione dei fasci coerenti nel caso di moduli graduati.

**Definizione 3.14.** Sia  $S$  un anello graduato ed  $M$  un  $S$ -modulo graduato. Per ogni  $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$ , definiamo  $M_{(\mathfrak{p})}$  l'insieme degli elementi omogenei di grado 0 nella localizzazione  $T^{-1}M$ , dove  $T = \{m \in S \setminus \mathfrak{p} \text{ omogeneo}\}$ . Costruiamo quindi il *fascio associato*  $\tilde{M}$  su  $\text{Proj } S$  che al generico aperto  $U \subseteq \text{Proj } S$  associa l'insieme delle funzioni

$$\tilde{M}(U) = \left\{ s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})} \right\}$$

tali che

1.  $\forall \mathfrak{p}, s(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})}$ ;
2.  $s$  è localmente un quoziente, cioè  $\forall \mathfrak{p} \in U$ , devono esistere un intorno  $V$  e due elementi dello stesso grado  $m \in M$  e  $a \in S$ , tali che per ogni  $\mathfrak{q} \in V$ ,  $a \notin \mathfrak{q}$  e  $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{a}$ .

**Proposizione 3.5.** Sia  $S$  un anello graduato e  $M$  un  $S$ -modulo graduato.

1.  $\tilde{M}$  è un  $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}$ -modulo.
2. Per ogni  $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$ , la spiga  $\tilde{M}_{\mathfrak{p}}$  è isomorfa al modulo  $M_{(\mathfrak{p})}$ .
3. Per ogni  $f \in S_+$  omogeneo, la restrizione  $\tilde{M}|_{D_+(f)}$  è isomorfa al fascio  $\widetilde{M_{(f)}}$ .
4.  $\tilde{M}$  è un fascio quasi-coerente; coerente se  $S$  è noetheriano.

*Dimostrazione.* Nuovamente, il punto 1. deriva dalla costruzione fatta; per il punto 2. si tratta di adattare la dimostrazione della Proposizione 2.22. Per quanto riguarda il punto 3. si considera l'isomorfismo tra  $D_+(f)$  e lo spettro  $\text{Spec } S_{(f)}$  e si ripete la dimostrazione della Proposizione 3.1 sostituendo i fasci strutturali con i fasci associati ai moduli.

Visto questo è immediato dedurre che  $\widetilde{M}$  è quasi-coerente perché al variare di  $f$  in  $S_+$  costruisco il ricoprimento  $\{D_+(f)\}$ , sul quale la restrizione del fascio  $\widetilde{M}$  si comporta bene. Se aggiungiamo l'ipotesi di noetherianità su  $S$  e di finita generazione su  $M$ , allora i moduli localizzati  $M_{(f)}$  risultano a loro volta finitamente generati, quindi  $\widetilde{M}$  è coerente. ■

**Definizione 3.15.** Sia  $S$  un anello graduato. Per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  costruiamo il fascio  $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(n) = \widetilde{S(n)}$ .  $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(1)$  viene detto *fascio twisting di Serre*. Per un qualsiasi  $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}$ -modulo  $\mathcal{F}$ , si definisce  *$n$ -esimo fascio twisted di  $\mathcal{F}$*  il prodotto tensoriale  $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\text{Proj } S} \mathcal{O}_{\text{Proj } S}(n)$ .

**Proposizione 3.6.** Sia  $S$  un modulo graduato e sia  $X = \text{Proj } S$ . Supponendo che  $S$  sia generato da  $S_1$  come  $S_0$ -algebra, per ogni  $S$ -modulo  $M$ ,  $\widetilde{M}(n) \simeq \widetilde{M(n)}$ .

Presi due  $A$ -moduli  $N$  e  $P$ , si dimostra che il fascio ottenuto tensorizzando i due moduli e poi costruendo il fascio associato è lo stesso fascio ottenuto tensorizzando i due fasci associati, cioè

$$\widetilde{N \otimes_A P} \simeq \widetilde{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec } A}} \widetilde{P}.$$

Infatti dalla definizione di prodotto tensoriale di fasci, ricaviamo che le sezioni globali su  $\text{Spec } A$  di  $\widetilde{N} \otimes \widetilde{P}$  sono

$$\Gamma(\widetilde{N} \otimes \widetilde{P}) = \Gamma(\widetilde{N}) \otimes_{\Gamma(\mathcal{O}_{\text{Spec } A})} \Gamma(\widetilde{P}) \simeq N \otimes_A M = \Gamma(\widetilde{N \otimes_A M}).$$

Estendendoci al caso graduato, quello che vogliamo fare è trovare un ricoprimento affine con un isomorfismo che ci consenta di ricondurci a moduli su anelli non graduati. Per fare questo abbiamo bisogno di alcuni risultati di algebra commutativa.

**Lemma 3.7.** Siano  $N$  un  $A$ -modulo. Esiste un unico isomorfismo di  $T^{-1}A$ -moduli

$$\begin{aligned} \varphi : T^{-1}A \otimes_A N &\longrightarrow T^{-1}N \\ \frac{a}{t} \otimes n &\longmapsto \frac{an}{t}, \quad \forall a \in A, \forall t \in T \text{ e } \forall n \in N. \end{aligned} \quad (3.7)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il morfismo  $T^{-1}A \times_A N \rightarrow T^{-1}N$  che associa alla coppia  $(a/t, n)$  l'elemento  $an/t$ . Questo morfismo è bilineare quindi è definito un morfismo

$$\varphi : T^{-1}A \otimes_A N \rightarrow T^{-1}N$$

che rispetta le condizioni (3.7).  $\varphi$  è suriettivo: il generico elemento  $n/t \in T^{-1}N$  è immagine dell'elemento  $\frac{1}{t} \otimes n \in T^{-1}A \otimes_A N$ .

Sia ora  $\sum_i (a_i/t_i) \otimes n_i$  il generico elemento di  $T^{-1}A \otimes_A N$ . Chiamiamo  $t = \prod_i t_i$  e  $\tau_i = \prod_{j \neq i} t_j$ , allora

$$\sum_i \frac{a_i}{t_i} \otimes n_i = \sum_i \frac{a_i \tau_i}{t_i \tau_i} \otimes n_i = \frac{1}{t} \otimes \sum_i a_i \tau_i n_i = \frac{1}{t} \otimes n,$$

quindi il generico elemento del prodotto tensoriale può essere scritto come  $\frac{1}{t} \otimes n$ .  $\varphi\left(\frac{1}{t} \otimes n\right) = 0$  implica  $\frac{n}{t} = 0$ , cioè deve esistere  $s \in T$  tale che  $sn = 0 \in N$ , pertanto

$$\frac{1}{t} \otimes n = \frac{s}{st} \otimes n = \frac{1}{st} \otimes sn = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0,$$

quindi  $\varphi$  è anche iniettivo. ■

**Lemma 3.8.** *Siano  $N$  e  $P$  due  $A$ -moduli e sia  $T \subseteq A$  un sistema moltiplicativo. Allora i  $T^{-1}A$ -moduli  $T^{-1}N \otimes_{T^{-1}A} T^{-1}P$  e  $T^{-1}(N \otimes_A P)$  sono isomorfi mediante l'isomorfismo*

$$\varphi\left(\frac{n}{t} \otimes \frac{p}{s}\right) = \frac{n \otimes p}{ts}.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione si ottiene facilmente combinando l'isomorfismo del Lemma 3.7 e gli isomorfismi canonici dei prodotti tensoriali. Innanzitutto per il lemma precedente

$$\begin{aligned} T^{-1}N \otimes_{T^{-1}A} T^{-1}P &\simeq (T^{-1}A \otimes_A N) \otimes_{T^{-1}A} (T^{-1}A \otimes_A P), \\ \frac{n}{t} \otimes \frac{p}{s} &\leftrightarrow \left(\frac{1}{t} \otimes n\right) \otimes \left(\frac{1}{s} \otimes p\right). \end{aligned}$$

Per la "commutatività" del prodotto tensoriale abbiamo

$$\begin{aligned} (T^{-1}A \otimes_A N) \otimes_{T^{-1}A} (T^{-1}A \otimes_A P) &\simeq (N \otimes_A T^{-1}A) \otimes_{T^{-1}A} (T^{-1}A \otimes_A P) \\ \left(\frac{1}{t} \otimes n\right) \otimes \left(\frac{1}{s} \otimes p\right) &\leftrightarrow \left(n \otimes \frac{1}{t}\right) \otimes \left(\frac{1}{s} \otimes p\right) \end{aligned}$$

e dal momento che  $T^{-1}A$  è sia un modulo su  $A$  che su  $T^{-1}A$

$$\begin{aligned} N \otimes_A \left(T^{-1}A \otimes_{T^{-1}A} (T^{-1}A \otimes_A P)\right) &\simeq N \otimes_A (T^{-1}A \otimes_A P) \\ n \otimes \left(\frac{1}{t} \otimes \left(\frac{1}{s} \otimes p\right)\right) &\leftrightarrow n \otimes \left(\frac{1}{ts} \otimes p\right) \end{aligned}$$

Per l'"associatività" e di nuovo per la "commutatività" del prodotto tensoriale si ottiene

$$N \otimes_A (T^{-1}A \otimes_A P) \simeq T^{-1}A \otimes_A (N \otimes_A P) \quad (3.8)$$

$$n \otimes \left(\frac{1}{ts} \otimes p\right) \leftrightarrow \frac{1}{ts} \otimes (n \otimes p) \quad (3.9)$$



che per il lemma 3.7 è proprio isomorfo a  $T^{-1}(N \otimes_A P)$

$$\frac{1}{ts} \otimes (n \otimes p) \leftrightarrow \frac{n \otimes p}{ts}. \quad \blacksquare$$

*Dimostrazione della proposizione 3.6.* Consideriamo un  $S$ -modulo graduato  $M$ . Dobbiamo dimostrare

$$\widetilde{M}(n) = \widetilde{M} \otimes \widetilde{S(n)} \simeq \widetilde{M(n)};$$

per poter utilizzare i lemmi precedenti dobbiamo quindi prima far vedere che  $M(n)$  è isomorfo come  $S$ -modulo a  $M \otimes_S S(n)$ . È sufficiente dimostrarlo nel caso  $n = 1$ , quindi

$$M(1) \simeq M \otimes_S S(1),$$

per poi procedere induttivamente. L'isomorfismo è indotto dal prodotto sulle coppie  $(m, s) \in M \times S(1)$  che vengono mandate nell'elemento  $sm \in M(1)$ : questo prodotto è compatibile con le graduazioni, bilineare su  $S$ , quindi è definito il morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : M \otimes_S S(1) &\longrightarrow M(1) \\ m \otimes s &\longmapsto sm, \quad \forall s \in S(1) \text{ e } \forall m \in M. \end{aligned}$$

$\varphi$  è suriettivo: l'elemento  $m \in M(1)$  è immagine dell'elemento  $m \otimes 1$ . Il generico elemento di  $M \otimes_S S(1)$ , può essere riscritto come  $m \otimes 1$  in quanto

$$m \otimes s = m \otimes s \cdot 1 = sm \otimes 1.$$

$\varphi$  è quindi anche iniettiva perché  $\varphi(m \otimes 1) = 0$  significa  $m = 0$ , da cui  $m \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$ .

Dal momento che  $S_1$  genera  $S$  come  $S_0$ -algebra, gli aperti principali, al variare di  $f \in S_1$ ,  $\{D_+(f)\}_{f \in S_1}$  formano un ricoprimento aperto: dimostriamo che le restrizioni dei fasci  $\widetilde{P \otimes S(d)}|_{D_+(f)}$  e  $\widetilde{P}|_{D_+(f)} \otimes \widetilde{S(d)}|_{D_+(f)}$  siano isomorfe per  $f \in S_1$  qualsiasi. Costruiamo l'isomorfismo tra  $P_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} S(1)_{(f)}$  e  $P(1)_{(f)}$  a partire dalla mappa che alla coppia  $(\frac{p}{f^k}, \frac{s}{f^h}) \in P_{(f)} \times S(1)_{(f)}$  associa  $\frac{sp}{f^{k+h}}$ . È bilineare e compatibile con le graduazioni quindi si può costruire il morfismo  $\psi : P_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} S(1)_{(f)} \rightarrow P(1)_{(f)}$

$$\frac{p}{f^k} \otimes \frac{s}{f^h} \longmapsto \frac{sp}{f^{k+h}}.$$

Questo morfismo è invertibile, con inversa la mappa che manda il generico elemento di  $P(1)_{(f)}$

$$\frac{p}{f^k} \text{ t.c. } p \in P(1)_k = P_{k+1}$$

nell'elemento

$$\frac{p}{f^{k+1}} \otimes \frac{f}{1},$$

pertanto possiamo identificare  $P(1)_{(f)}$  con  $P_{(f)} \otimes f$ . Quest'osservazione ci suggerisce anche come incollare insieme i vari aperti affini, per esempio consideriamo i due aperti del ricoprimento  $D_+(f)$  e  $D_+(g)$ ,  $f, g \in S_1$ , con intersezione non vuota: costruiamo il morfismo di passaggio  $P_{(f)} \otimes f \rightarrow P_{(g)} \otimes g$  nel seguente modo

$$\frac{p}{f^{k+1}} \otimes f \xrightarrow{\cdot \left(\frac{f}{g}\right)^k} \left(\frac{f}{g}\right)^k \cdot \left(\frac{p}{f^{k+1}} \otimes f\right) = \frac{p}{g^{k+1}} \otimes g,$$

ben definito perché sull'intersezione abbiamo sia  $f$  che  $g$  come possibili denominatori e la moltiplicazione per una potenza di  $\frac{f}{g}$  rispetta evidentemente la graduazione. ■

*Osservazione 3.16.* L'ipotesi  $S = S_0[S_1]$  è essenziale nella dimostrazione, come mette in luce questo controesempio. Consideriamo l'anello graduato  $R = k[x^2]$  e il modulo graduato su  $R(1)$  con la graduazione indotta dal grado effettivo dei polinomi. In  $R$  non abbiamo elementi di grado 1, quindi  $R$  non è generato come  $R_0$  algebra da  $R_1$ . Calcoliamo esplicitamente le localizzazioni omogenee di  $R(1) \otimes_R R(1) \simeq R(2)$  e  $R(1)$  in  $x^2$ :

$$R(2)_{(x^2)} = \left\{ \frac{r}{x^{2k}} \mid r \in R(2)_{2k} = R_{2k+2} \right\} = \left\{ \frac{cx^{2k+2}}{x^{2k}} = cx^2 \mid c \in k \right\} \simeq k,$$

$$R(1)_{(x^2)} = \left\{ \frac{r}{x^{2k}} \mid r \in R(1)_{2k} = R_{2k+1} \right\} = 0 \implies R(1)_{(x^2)} \otimes R(1)_{(x^2)} = 0$$

pertanto l'isomorfismo non vale.

**Corollario 3.9.** *Nel caso particolare del fascio strutturale*

$$\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \simeq \mathcal{O}_X(n+m).$$

Possiamo ora utilizzare quest'ultimo corollario per definire un modulo graduato associato ad un fascio.

**Definizione 3.17.** Sia  $S$  un modulo graduato e sia  $\mathcal{F}$  un fascio di moduli su  $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}$ . Si definisce *modulo graduato associato ad  $\mathcal{F}$*  l'insieme

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{F}(n)),$$

con la seguente struttura: preso  $s$  in  $S_d$  e  $f \in \Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{F}(n))$ , consideriamo la sezione globale definita da  $s$  in  $\Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{O}_{\text{Proj } S}(d))$  e definiamo il prodotto  $s \cdot f$  come l'elemento in  $\Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{F}(n+d))$  definito dal prodotto tensoriale  $s \otimes f$ :

$$\begin{aligned} (s, f) \in S \times \Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{F}(n)) &\longmapsto (s, f) \in \mathcal{O}_{\text{Proj } S}(d) \times \Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{F}(n)) \\ &\longmapsto s \otimes f \in \Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{F}(n+d)). \end{aligned}$$

Notiamo che questo prodotto è ben definito e rispetta la graduazione,  $S_d \cdot \Gamma_*(\mathcal{F})_n \subseteq \Gamma_*(\mathcal{F})_{d+n}$ , grazie all'isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(n) \otimes \mathcal{O}_{\text{Proj } S}(d) &\simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\text{Proj } S}(n) \otimes \mathcal{O}_{\text{Proj } S}(d) \\ &\simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\text{Proj } S}(n+d) \simeq \mathcal{F}(n+d). \end{aligned}$$

**Proposizione 3.10.** *Sia  $S = A[X_0, \dots, X_r]$  l'anello dei polinomi a coefficienti nell'anello  $A$ . Allora*

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \simeq S.$$

*Dimostrazione.* Si veda [Hart, Ch. II, Prop. 5.13]. ■

**Definizione 3.18.** Sia  $X$  uno schema e  $\mathcal{F}$  un fascio coerente di  $\mathcal{O}_X$ -moduli. Se esiste una famiglia di sezioni globali  $\{s_j\}_{j \in J} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ , tali che, per ogni punto  $x \in X$ , la spiga  $\mathcal{F}_x$  è generata come  $\mathcal{O}_x$ -modulo dalle immagini delle sezioni  $s_j$ , il fascio si dice *generato dalle sezioni globali*.

*Osservazione 3.19.* Un fascio  $\mathcal{F}$  generato da sezioni globali è un quoziente di fasci liberi, infatti le sezioni  $\{s_j\}$  determinano un morfismo di fasci suriettivo

$$\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

### 3.2.2 Fasci di ideali

In questa sottosezione elenchiamo, illustrandone alcuni aspetti, le proprietà riguardanti la relazione tra ideali dell'anello dei polinomi e sottoschemi chiusi.

**Definizione 3.20.** Sia  $X$  uno schema. Un fascio di moduli  $\mathcal{I}$  sottofascio del fascio strutturale  $\mathcal{O}_X$  si dice *fascio di ideali*; quindi per ogni aperto  $U \subseteq X$ ,  $\mathcal{I}(U)$  è un sottomodulo di  $\mathcal{O}_X(U)$ .

**Definizione 3.21.** Dato uno schema  $X$ , consideriamo un sottoschema chiuso  $Y$  con il morfismo immersione  $i : Y \hookrightarrow X$ . Si definisce *fascio ideale* di  $Y$ , e si indica con  $\mathcal{I}_Y$ , il nucleo del morfismo di fasci  $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$ .

**Proposizione 3.11.** *Sia  $X$  uno schema noetheriano. Dato un sottoschema chiuso  $Y \subseteq X$ , il fascio ideale  $\mathcal{I}_Y$  è coerente. Viceversa ogni fascio di ideali di  $\mathcal{O}_X$  è il fascio ideale di un unico sottoschema chiuso.*

*Dimostrazione.* Per dimostrare che  $\mathcal{I}_Y$  è coerente, è sufficiente dimostrare che il fascio  $i_*\mathcal{O}_Y$  è coerente, in quanto il nucleo di un morfismo di fasci coerenti è coerente ([Hart, Cap. II, Prop. 5.7]). Che  $i_*\mathcal{O}_Y$  è coerente è un fatto locale quindi possiamo considerare  $X = \text{Spec } A$  affine. Un chiuso di  $X$  sarà del tipo

$\text{Spec } A/\mathfrak{a}$  in quanto il morfismo di anelli  $f : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$  induce un omeomorfismo tra  $\text{Spec } A/\mathfrak{a}$  e  $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ . Considerando l'inclusione  $i : \text{Spec } A/\mathfrak{a} \hookrightarrow \text{Spec } A$ ,  $i_*\mathcal{O}_{\text{Spec } A/\mathfrak{a}}$  è coerente in quanto corrisponde a  $\widetilde{A/\mathfrak{a}}$  pertanto  $\mathcal{F}_{\text{Spec } A/\mathfrak{a}} = \widetilde{\mathfrak{a}}$ .

Viceversa dato un fascio di ideali  $\mathcal{I}$ , consideriamo il fascio quoziente  $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$  e chiamiamo  $Y$  il supporto del fascio (l'insieme di punti su cui la spiga è non banale). Verifichiamo che la coppia  $(Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{I})$  è un sottoschema chiuso. Nuovamente si tratta di una proprietà locale quindi possiamo limitarci al caso affine  $X = \text{Spec } A$ , quindi  $\mathcal{I} = \widetilde{\mathfrak{a}}$  per un certo ideale  $\mathfrak{a} \subseteq A$ . Pertanto  $(Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{I})$  è il sottoschema chiuso individuato da  $\text{Spec } A/\mathfrak{a}$ . ■

**Proposizione 3.12.** *Sia  $S$  un anello graduato generato da  $S_1$  come  $S_0$ -algebra. Sia  $\mathcal{F}$  un fascio quasi-coerente su  $\text{Proj } S$ . C'è un isomorfismo canonico tra  $\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}$  e  $\mathcal{F}$ .*

*Dimostrazione.* L'isomorfismo è dato sugli aperti principali  $D_+(f)$  con  $f \in S_1$ . Una sezione di  $\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}$  su  $D_+(f)$  è rappresentata dalla frazione

$$\frac{m}{f^k}, \quad \text{con } m \in \Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{F}(k)).$$

Possiamo immaginare  $f^{-k}$  come elemento in  $\mathcal{O}_{D_+(f)}(-k)$  e definire l'immagine di  $\frac{m}{f^k}$  in  $\mathcal{F}$  come  $m \otimes f^{-k}$ , infatti

$$m \otimes f^{-k} \in \mathcal{F}(d) \otimes \mathcal{O}_{D_+(f)}(-k) \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{D_+(f)}(k) \otimes \mathcal{O}_{D_+(f)}(-k) \simeq \mathcal{F}.$$

Per la dimostrazione del fatto che il morfismo costruito è un isomorfismo, si veda [Hart, Cap. II, Prop. 5.15]. ■

**Proposizione 3.13.** *Sia  $A$  un anello e  $Y$  un sottoschema chiuso di  $\mathbb{P}_A^r$ . Esiste un ideale omogeneo  $\mathfrak{i} \subseteq S = A[X_0, \dots, X_r]$  tale che  $Y$  è il sottoschema chiuso determinato da  $\mathfrak{i}$ .*

*Dimostrazione.* Si consideri il fascio di ideali  $\mathcal{I}_Y$  di  $Y$ , sottofascio di  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ . Le sezioni globali e la tensorizzazione rispettano l'inclusione pertanto  $\Gamma_*(\mathcal{I}_Y)$  è un sottomodulo di  $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}) \simeq S$ . Chiamiamo  $\mathfrak{i}$  l'ideale di  $S$  definito da  $\Gamma_*(\mathcal{I}_Y)$ ; questo ideale definisce un sottoschema chiuso di  $\mathbb{P}_A^r$  mediante il morfismo  $\text{Proj } S/\mathfrak{i} \rightarrow \mathbb{P}_A^r$ , indotto dal morfismo di anelli graduati  $S \rightarrow S/\mathfrak{i}$ . Per la proposizione 3.12, abbiamo  $\mathcal{I}_Y \simeq \widetilde{\mathfrak{i}}$  e quindi per l'unicità del sottoschema definito da un fascio di ideali (Proposizione 3.11),  $Y$  coincide con il sottoschema chiuso  $\text{Proj } S/\mathfrak{i}$  definito da  $\mathfrak{i}$ . ■

### 3.3 Fibrati proiettivi

Ricordiamo che dato un  $A$ -modulo  $M$ , si definisce *algebra tensoriale* la somma diretta

$$T(M) = \bigoplus_{d \geq 0} T^d(M) = \bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{(M \otimes_A \cdots \otimes_A M)}_{d \text{ volte}},$$

dove per definizione  $T^0(M) = A$ . Se quozientiamo  $T(M)$  per il sottomodulo generato da tutti gli elementi del tipo  $x \otimes y - y \otimes x$ ,  $\forall x, y \in M$ , troviamo l'*algebra simmetrica*

$$S(M) = \bigoplus_{d \geq 0} S^d(M).$$

Nel caso in cui  $M$  sia un  $A$ -modulo libero di rango  $n$ , cioè  $M \simeq A^n$ , fissata una base  $m_1, \dots, m_n$ , l'algebra simmetrica  $S(M)$  risulta essere isomorfa all'anello dei polinomi  $A[m_1, \dots, m_n]$ .

Possiamo estendere questa costruzione anche ai fasci di moduli.

**Definizione 3.22.** Dato uno spazio anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$ , sia  $\mathcal{F}$  un fascio di  $\mathcal{O}_X$ -moduli su  $X$ . Si definisce *algebra simmetrica* di  $\mathcal{F}$ , e si indica con  $S(\mathcal{F})$ , il fascio associato al prefascio

$$U \longmapsto S(\mathcal{F}(U)), \quad \forall U \subseteq X,$$

dove  $S(\mathcal{F}(U))$  è l'algebra simmetrica di  $\mathcal{F}(U)$  come  $\mathcal{O}_X(U)$ -modulo.  $S(\mathcal{F})$  risulta essere una  $\mathcal{O}_X$ -algebra e  $S^d(\mathcal{F})$  un  $\mathcal{O}_X$ -modulo per ogni grado  $d$ .

*Osservazione 3.23.* Procedendo in maniera analoga al caso di moduli finitamente generati, è facile vedere che se  $\mathcal{F}$  è localmente libero di rango  $n$ ,  $S^d(\mathcal{F})$  è ancora localmente libero di rango  $\binom{n+d-1}{n-1}$ .

Vorremmo costruire l'analogo del Proj di un anello graduato nel caso dell'algebra simmetrica  $S(\mathcal{F})$ . Prima di fare ciò, poniamo alcune restrizioni che considereremo sempre valide nel proseguio. Dato uno schema noetheriano  $X$ , sia  $\mathcal{F}$  un fascio di  $\mathcal{O}_X$ -moduli quasi-coerente con la struttura di  $\mathcal{O}_X$ -algebra graduata, cioè

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{F}_d.$$

Supponiamo che  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_X$ , che  $\mathcal{F}_1$  sia coerente e che localmente  $\mathcal{F}$  sia generato da  $\mathcal{F}_1$  come  $\mathcal{F}_0$ -algebra.

**Definizione 3.24.** Sia  $X$  uno schema e  $\mathcal{F}$  un fascio di  $\mathcal{O}_X$ -moduli che rispetta le condizioni precisate in precedenza. Per ogni aperto affine  $U = \text{Spec } A$ , consideriamo l'algebra graduata su  $\mathcal{O}_X(U) \simeq A$

$$\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F}|_U) = \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(U, \mathcal{F}_d|_U).$$

e il corrispondente  $\text{Proj } \mathcal{F}(U)$ . Abbiamo inoltre un morfismo

$$\pi_U : \text{Proj } \mathcal{F}(U) \rightarrow U$$

indotto dal morfismo canonico  $A \rightarrow \mathcal{F}(U)$ . Si può vedere che questi morfismi si comportano bene sull'intersezione di due aperti affini  $U$  e  $V$  ([Hart, Ch. II, Sec. 7]) pertanto possiamo definire  $\mathcal{P}\text{roj } \mathcal{F}$  lo schema ottenuto incollando tutti i  $\text{Proj } \mathcal{F}(U)$ , con il morfismo associato  $\pi : \mathcal{P}\text{roj } \mathcal{F} \rightarrow X$ .

**Definizione 3.25.** Sia  $X$  uno schema noetheriano e  $\mathcal{E}$  un fascio coerente localmente libero su  $X$ . Chiamata  $\mathcal{S}$  l'algebra simmetrica  $S(\mathcal{E})$ , si definisce *fibrato proiettivo* di  $\mathcal{E}$

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}\text{roj } \mathcal{S}, \quad (3.10)$$

con il morfismo proiezione  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ .

*Osservazione 3.26.* Dato uno schema  $X$  e un fascio coerente  $\mathcal{F}$  con la struttura di  $\mathcal{O}_X$ -algebra, per costruzione

$$\pi^{-1}(U) = \text{Proj } \mathcal{F}(U), \quad \forall U \subseteq X \text{ affine.}$$

Se consideriamo ora un qualsiasi  $\mathcal{E}$ , fascio coerente localmente libero di rango  $n + 1$ , per ogni aperto affine  $U = \text{Spec } A$ ,  $\mathcal{E}|_U$  è isomorfo ad un certo  $\tilde{M}$ , con  $M$   $A$ -modulo finitamente generato. Essendo  $\mathcal{E}$  localmente libero  $M = \mathcal{E}(U)$  è isomorfo al modulo  $\mathcal{O}_X(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(U) \simeq A^{n+1}$ , pertanto  $S(\mathcal{E}(U))$  risulta essere isomorfo all'anello dei polinomi  $A[x_0, \dots, x_n]$ . In conclusione, dato il morfismo proiettivo  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ , per ogni aperto affine  $U \subseteq X$

$$\pi^{-1}(U) = \text{Proj } S(\mathcal{E}(U)) = \text{Proj } A[x_0, \dots, x_n] = \mathbb{P}_U^n. \quad (3.11)$$

**Proposizione 3.14.** Sia  $X$  uno schema noetheriano con  $\mathcal{E}$  fascio localmente libero coerente. Indicata con  $\mathcal{S}$  l'algebra sommetrica  $S(\mathcal{E})$ , sia  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  il fibrato proiettivo con  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$  morfismo proiezione associato.

1. Se il rango di  $\mathcal{E}$  è maggiore o uguale a 2, esiste un morfismo canonico di  $\mathcal{O}_X$ -algebre

$$\mathcal{S} \simeq \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(d)),$$

dove  $d$  dà la graduazione sul secondo membro. Inoltre

- $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(d)) = 0, \quad \forall d < 0;$
- $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}) = \mathcal{O}_X;$
- $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)) = \mathcal{E}.$

2. Esiste un morfismo suriettivo canonico

$$\pi^* \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \longrightarrow 0.$$

*Dimostrazione.* [Hart, Ch. II, Prop. 7.11]. ■

### 3.4 Coomologia

In questa sezione richiamiamo alcuni teoremi, senza dimostrazione, riguardanti la coomologia dei fasci su schemi. L'impostazione seguita è quella proposta da Hartshorne in [Hart, Cap. III].

**Proposizione 3.15.** *Sia  $Y$  un sottoschema chiuso di uno schema  $X$  con l'inclusione  $j : Y \hookrightarrow X$  e sia  $\mathcal{F}$  un fascio su  $Y$ . Allora denotato con  $j_*\mathcal{F}$  il fascio su  $X$  estensione di  $\mathcal{F}$ , che vale zero fuori da  $Y$ , per ogni  $i$*

$$H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, j_*\mathcal{F}).$$

*Dimostrazione.* [Hart, Ch. III, Lemma 2.10] ■

Utilizzando questa proposizione, non specificheremo sempre la mappa di inclusione  $j$  e scriveremo  $H^i(X, \mathcal{F})$  in luogo di  $H^i(X, j_*\mathcal{F})$ , se questo non genererà ambiguità.

**Teorema 3.16.** *Sia  $X = \text{Spec } A$  uno schema affine e sia  $\mathcal{F}$  un fascio quasi-coerente su  $X$ . Per ogni  $i > 0$*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0.$$

*Dimostrazione.* [Hart, Ch. III, Th. 3.5] ■

**Teorema 3.17.** *Dato un anello noetheriano  $A$ , sia  $S = A[X_0, \dots, X_r]$  e  $\mathbb{P}_A^r = \text{Proj } S$  per  $r \geq 1$ .*

1. *Il morfismo canonico di  $S$ -moduli*

$$S \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}_A^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}(n))$$

*è un isomorfismo di moduli graduati.*

2.  $H^i(\mathbb{P}_A^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}(n)) = 0$ , per ogni  $0 < i < r$  e per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .
3.  $H^r(\mathbb{P}_A^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}(-r-1)) = A$ .

*Dimostrazione.* [Hart, Ch. III, Th. 5.1] ■

**Teorema 3.18 (Serre).** *Sia  $X$  uno schema proiettivo su un anello noetheriano  $A$  con un'immersione chiusa  $j : X \rightarrow \mathbb{P}_A^r$ , per un certo  $r$  fissato, e sia  $\mathcal{F}$  un fascio coerente su  $X$ .*

1. *Per ogni  $i \geq 0$ ,  $H^i(X, \mathcal{F})$  è un  $A$ -modulo finitamente generato.*
2. *Esiste un intero  $m_0$ , dipendente da  $\mathcal{F}$ , tale che per ogni  $i > 0$*

$$H^i(X, \mathcal{F}(m)) = 0, \quad \forall m \geq m_0.$$

*Dimostrazione.* [Hart, Ch. III, Th. 5.2] ■

*On peut considérer que la géométrie nouvelle est [...] une synthèse entre [...] le monde "arithmétique", dans lequel vivent les (soi-disants) "espaces" sans principe de continuité, et le monde de la grandeur continue, où vivent les "espaces" au sens propre du term [...]. Dans la vision nouvelle, ces deux mondes jadis séparés, n'en forment plus qu'un seul.*

Alexandre GROTHENDIECK **[R&S]**



## Capitolo 4

# Lo schema di Hilbert

**Definizione 4.1.** Una famiglia di sottoschemi chiusi di  $\mathbb{P}^r$  è una famiglia  $f : X \rightarrow S$  parte del diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X^c & \longrightarrow & \mathbb{P}^r \times S \\ & \searrow f & \downarrow \pi_S \\ & & S \end{array}$$

$S$  viene detto *schema parametro* della famiglia.

Per ogni punto  $s \in S$ , chiamato  $k(s)$  il campo residuo in  $s$ , possiamo effettuare l'estensione di base  $\text{Spec } k(s) \rightarrow S$

$$\begin{array}{ccccc} X_s & \longrightarrow & X^c & \longrightarrow & \mathbb{P}^r \times S \\ \downarrow & & \downarrow f & & \swarrow \\ \text{Spec } k(s) & \xrightarrow{s} & S & & \end{array}$$

dove  $X_s = X \times_S \text{Spec } k(s)$  è l'elemento della famiglia corrispondente a  $s$ . Dal momento che  $\text{Spec } k(s)$  è rappresentante da un singolo punto, l'estensione di base non modifica il sottoschema chiuso  $f^{-1}(s)$  di  $\mathbb{P}^r$ , ma serve per metterne in evidenza la struttura.

Questa definizione è fin troppo generale perché senza restrizioni sul morfismo  $f$ , non siamo in grado di dire molto sulle proprietà e sulle caratteristiche comuni delle fibre. Vorremmo che durante una deformazione algebrica alcune proprietà vengano conservate, che si sia quindi una sorta di *continuità algebrica* delle deformazione.

## 4.1 Il polinomio di Hilbert di un fascio

**Definizione 4.2.** Dato uno schema proiettivo  $X$  sul campo  $k$ , sia  $\mathcal{F}$  un fascio coerente su  $X$ . Si definisce *caratteristica di Eulero* di  $\mathcal{F}$  la sommatoria

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F}). \quad (4.1)$$

*Osservazione 4.3.* Dal Teorema 3.18 di Serre, sappiamo che per ogni  $i$ ,  $H^i(X, \mathcal{F})$  è uno spazio vettoriale su  $k$  di dimensione finita, quindi ha senso considerare la somma a segni alterni delle dimensioni.

**Lemma 4.1.** *Data la successione esatta di fasci*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0,$$

allora

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}''). \quad (4.2)$$

*Dimostrazione.* La successione esatta di fasci induce la successione sulla coomologia

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \longrightarrow \dots$$

Interpretando la successione come tra spazi vettoriali su  $k$ , si ricava

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left( (-1)^i (\dim H^i(X, \mathcal{F}') + \dim H^i(X, \mathcal{F}'')) + (-1)^{i+1} \dim H^i(X, \mathcal{F}) \right) = 0$$

da cui

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F}') + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F}'') = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F})$$

quindi

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}''). \quad \blacksquare$$

Fissato un fascio coerente  $\mathcal{F}$ , possiamo considerare la funzione da  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Z}$

$$n \mapsto \chi(\mathcal{F}(n)). \quad (4.3)$$

Osserviamo che, sempre per il Teorema 3.18, per  $n$  sufficientemente grande,  $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ ,  $\forall i > 0$ , quindi  $\chi(\mathcal{F}(n)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{F}(n))$ .

**Teorema 4.2.** *Sia  $X$  uno schema proiettivo su un campo  $k$  e sia  $\mathcal{F}$  un fascio coerente su  $X$ . Esiste un polinomio  $P_{\mathcal{F}}(z) \in \mathbb{Q}[z]$  tale che*

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = P_{\mathcal{F}}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$P_{\mathcal{F}}$  viene detto *polinomio di Hilbert del fascio  $\mathcal{F}$* .

---

Introduciamo preliminarmente la definizione di supporto di un fascio. Pre-  
sa una sezione  $s \in \mathcal{F}(U)$  sull'aperto  $U$ , si definisce supporto di  $s$  l'insieme  
 $\text{Supp } s = \{Q \in U \mid s_Q \neq 0\}$ . Per supporto di  $\mathcal{F}$  si intende invece l'insieme

$$\text{Supp } \mathcal{F} = \{Q \in X \mid \mathcal{F}_Q \neq \mathcal{O}\}.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema nel caso  $X = \mathbb{P}_k^r$ . Per il caso generale  
è sufficiente fare qualche modifica. Procediamo induttivamente sulla dimen-  
sione del supporto di  $\mathcal{F}$ . Se  $\dim \text{Supp } \mathcal{F} = 0$ , allora il supporto è l'unione di  
un numero finito di punti di  $X$ , cioè  $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{F}_{Q_i}$ . È sufficiente dimostrarlo  
nel caso di un supporto composto da un singolo punto e poi procedere indut-  
tivamente: ad esempio nel caso di due punti, basta considerare la successione  
esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{Q_1} \longrightarrow \mathcal{F}_{Q_1} \oplus \mathcal{F}_{Q_2} \longrightarrow \mathcal{F}_{Q_2} \longrightarrow 0,$$

ed utilizzare il Lemma 4.1. Consideriamo quindi  $\text{Supp } \mathcal{F} = \{Q\}$ . Vogliamo  
far vedere che per  $n$  qualsiasi,  $\text{Supp } \mathcal{F}(n) = \{Q\}$ . Posto  $S = k[X_0, \dots, X_r]$ ,  
per definizione esiste un aperto affine  $U = \text{Spec } S_{(X_i)}$  che contiene  $Q$ , quin-  
di possiamo limitarci a  $\mathcal{F}|_U$  e  $\mathcal{F}(n)|_U$ , in quanto al di fuori siamo sicuri che  
tutto sia nullo. Si tratta di fasci coerenti quindi deve esistere un modulo  $\widetilde{M}$ ,  
tale che  $\widetilde{M} = \mathcal{F}|_U$  ed inoltre chiamiamo  $\widetilde{\mathcal{O}(n)}_U$  la restrizione del fascio  $\widetilde{S(n)}$   
a  $\text{Spec } k[X_0, \dots, X_r]_{(X_i)}$ ,  $\widetilde{\mathcal{O}(n)}_U \simeq S(n)_{(X_i)}$ . Applichiamo il Lemma 3.8 sugli  
 $S_{(X_i)}$ -moduli  $M$  e  $S(n)_{(X_i)}$  con sistema moltiplicativo  $T = S_{(X_i)} \setminus \mathfrak{p}$ , dove  $\mathfrak{p}$  è il  
primo corrispondente al punto generico  $P$  di  $U$ , ottenendo

$$M_P \otimes \left( S(n)_{(X_i)} \right)_P \simeq \left( M \otimes S(n)_{(X_i)} \right)_P.$$

Per la Proposizione 2.22, a destra abbiamo la spiga della restrizione del fascio  
 $\mathcal{F}(n)$  all'aperto  $U$ ; dal momento che  $M_P \simeq (\mathcal{F}|_U)_P$  è non nullo nel caso  $P =$   
 $Q$ , abbiamo dimostrato che

$$\text{Supp } \mathcal{F}(n) = \{Q\}, \quad \forall n.$$

Calcoliamo la coomologia di Čech di  $\mathcal{F}$ , troviamo che per ogni  $i > 0$ ,  $H^i(X, \mathcal{F})$   
è nullo in quanto il complesso di Čech è non vuoto solo al passo 0. Quindi per  
ogni  $n$

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{F}(n)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{F}),$$

cioè la funzione  $n \mapsto \chi(\mathcal{F}(n))$  è costante, quindi polinomiale.

Sia ora  $\dim \text{Supp } \mathcal{F} = d$  e sia  $s$  un elemento di  $S(1)$ , tale che l'iperpiano  
 $H = \{s = 0\}$  non contenga alcuna componente irriducibile di  $\text{Supp } \mathcal{F}$ .  $s$   
induce la successione esatta

$$0 \longrightarrow S(-1) \xrightarrow{s} S \longrightarrow S/(s) \longrightarrow 0$$


---

che sui fasci strutturali produce la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow 0$$

che, infine, tensorizzata per  $\mathcal{F}$  dà

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_H \longrightarrow 0.$$

Risulta quindi  $\text{Supp } \mathcal{F}_H \subseteq \text{Supp } \mathcal{F} \cap H$ , cioè

$$\dim \text{Supp } \mathcal{F}_H \leq \dim (\text{Supp } \mathcal{F} \cap H) < \dim \text{Supp } \mathcal{F},$$

per tanto per l'ipotesi induttiva  $\chi(\mathcal{F}_H(n))$  è polinomiale. Tensorizzando per  $\mathcal{O}_X(n)$  e utilizzando la (4.2) otteniamo

$$\chi(\mathcal{F}(n)) - \chi(\mathcal{F}(n-1)) = \chi(\mathcal{F}_H(n)) = P_{\mathcal{F}_H}(n).$$

La differenza tra i valori assunti su due interi consecutivi dalla funzione (4.3) è esprimibile mediante un polinomio, allora per la Proposizione 1.18 anche la funzione stessa è polinomiale per  $n \gg 0$ , quindi esiste  $P_{\mathcal{F}} \in \mathbb{Q}[z]$  tale che

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = P_{\mathcal{F}}(n). \quad \blacksquare$$

*Osservazione 4.4.* La definizione di polinomio di Hilbert di un fascio è consistente con la definizione di polinomio di Hilbert data per gli ideali. Sia  $X$  un sottoschema chiuso di  $\mathbb{P}^r = \text{Proj } S$  e sia  $\mathcal{I}_X$  il fascio ideale corrispondente a  $X$ . L'isomorfismo

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \simeq S \tag{4.4}$$

ristretto al fascio di ideali  $\mathcal{I}_X$  definisce un ideale  $i$ . Secondo la *vecchia* definizione il polinomio di Hilbert dello schema  $X = \text{Proj } S/i$  è quindi  $P_S - P_i$ . Ma per l'isomorfismo (4.4) abbiamo

$$P_X(z) = P_S(z) - P_i(z) = P_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}}(z) - P_{\mathcal{I}_X}(z) = P_{\mathcal{O}_X}(z).$$

## 4.2 Morfismi piatti

Il concetto di morfismo piatto risponde alla nostra richiesta garantendo che il polinomio di Hilbert delle fibre è indipendente dal punto dello schema base scelto.

Richiamiamo la definizione di modulo piatto.

**Definizione 4.5.** Sia  $A$  un anello e  $M$  un  $A$ -modulo.  $M$  si dice *piatto* se il funtore  $N \mapsto N \otimes_A M$  è un funtore esatto dalla categoria degli  $A$ -moduli in se stessa, quindi data la successione esatta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

anche la successione

$$0 \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A M \longrightarrow Q \otimes_A M \longrightarrow 0,$$

risulta essere esatta.

**Definizione 4.6.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo di schemi e sia  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -modulo.  $\mathcal{F}$  si dice *piatto* su  $Y$  al punto  $x \in X$  se  $\mathcal{F}_x$  è un  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modulo, dove  $y = f(x)$ , mediante il morfismo canonico  $f_y^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ .

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{Y,y} \times \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \times \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \mathcal{F}_x \\ (a, s) & \longrightarrow & (f_y^\#(a), s) & \longrightarrow & f_y^\#(a) \cdot s \end{array}$$

$\mathcal{F}$  si dice *piatto* su  $Y$  se è piatto ad ogni punto di  $X$ .

**Definizione 4.7.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo di schemi.  $X$  si dice *piatto* su  $Y$  se è piatto il fascio strutturale  $\mathcal{O}_X$ .

Si può facilmente dimostrare che

**Lemma 4.3.** • *La composizione di morfismi piatti è piatta.*

• *L'estensione di base preserva la piatezza.*

**Teorema 4.4.** *Sia  $X$  uno schema proiettivo su  $T$ , schema noetheriano connesso. Se  $X$  è piatto su  $T$ , allora il polinomio  $P_{X_t} \in \mathbb{Q}[z]$  delle fibra  $X_t$ ,  $t \in T$  è indipendente da  $t$ .*

*Dimostrazione.*  $X$  è uno schema proiettivo, quindi esisterà  $r$  tale che  $X \subseteq \mathbb{P}_k^r$ .  $\mathbb{P}_k^r$  e  $T$  sono schemi su  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , quindi possiamo considerare il prodotto fibrato  $\mathbb{P}_k^r \times_{\mathbb{Z}} T = \mathbb{P}_T^r$  e interpretare  $X$  come schema su  $T$  mediante il morfismo indotto  $f$ :

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}_T^r & \longrightarrow & \mathbb{P}_k^r \\ & \searrow f & \downarrow & & \downarrow \\ & & T & \longrightarrow & \text{Spec } \mathbb{Z} \end{array}$$

Possiamo restringerci al caso  $T = \text{Spec } A$ , per un certo anello  $A$  noetheriano, in quanto per definizione ogni punto dello schema ha un tale intorno. Data la fibra  $X_t$  definita mediante l'estensione di base

$$\begin{array}{ccc} X_t = X \times_T \text{Spec } k(t) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k(t) & \longrightarrow & T \end{array}$$

dove  $k(t)$  è il campo residuo in  $t$ , definiamo l' $\mathcal{O}_X$ -modulo graduato

$$M_t = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(m)),$$

quindi  $P_t(m) = \dim_{k(t)} H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(m))$ .

Il primo passo è dimostrare che  $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$  è un  $A$ -modulo libero di rango finito per ogni  $m$  sufficientemente grande. Calcoliamo quindi, mediante la coomologia di Čech,  $H^i(X, \mathcal{O}_X(m))$  sul ricoprimento affine standard  $\mathcal{U} = \{U_i\}$ .  $\mathcal{O}_X$  è coerente, quindi per ogni aperto affine  $U_i$  esiste un modulo  $N_i$  tale che  $\mathcal{O}_{X|U_i} = \tilde{N}$ . La piatezza di  $\mathcal{O}_X$  su  $T = \text{Spec } A$ , implica che  $N_i$  sia un  $A$ -modulo per ogni  $i$  (vedi [Hart, Cap. III, Prop. 9.2]), quindi ogni termine del complesso  $C(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(m))$  è un  $A$ -modulo. Per il Teorema 3.18 di Serre, per  $m$  sufficientemente grande,  $H^i(X, \mathcal{O}_X(m))$  è nullo per ogni  $i > 0$ . Abbiamo quindi la successione esatta di  $A$ -moduli

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(m)) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(m)) \xrightarrow{d_1} \dots \\ \dots \longrightarrow C^r(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(m)) \longrightarrow 0$$

Suddividendo in successioni esatte corte e considerando il primo pezzo si ha

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(m)) \longrightarrow \ker d_1 \longrightarrow 0.$$

Dal fatto che  $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$  è finitamente generato (Teorema 3.18) e dalla Proposizione 9.1A [Hart, Cap. III], possiamo affermare che  $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$  è un  $A$ -modulo libero di rango finito.

Il secondo passo è dimostrare che

$$P_t(m) = \text{rank } H^0(X, \mathcal{O}_X(m)),$$

cioè che per ogni  $t$ ,  $H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(m)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes_A k(t)$ . Possiamo supporre di considerare  $t$  punto chiuso, infatti se  $t$  non è chiuso, per ricondursi a tale caso, è sufficiente considerare lo spettro della sua localizzazione  $A_t$  ed effettuare l'estensione di base  $T' = \text{Spec } A_t \rightarrow T$ . Sia  $\mathfrak{m}$  l'ideale massimale che definisce  $t$  e sia  $\{h_1, \dots, h_q\}$  un sistema di generatori. Consideriamo quindi il morfismo

$$\begin{array}{ccc} A^q & \longrightarrow & A \\ (a_1, \dots, a_q) & \longmapsto & a_1 h_1 + \dots + a_q h_q \end{array}$$

che genera la successione esatta

$$A^q \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0. \quad (4.5)$$

A questo punto otteniamo un morfismo di fasci

$$\mathcal{O}_X^q \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_t} \longrightarrow 0$$

che completiamo con la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{O}_X^q \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_t} \longrightarrow 0.$$

Spezziamo ora nelle successioni esatte corte

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{O}_X^q \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X_t} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Possiamo tensorizzare  $\mathcal{O}_X(m)$ , per  $m$  sufficientemente grande, in modo che tutti i gruppi di coomologia per  $i > 0$  siano nulli. Ricordando che per la Proposizione 3.15  $H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(m)) = H^0(X, \mathcal{O}_{X_t}(m))$ , otteniamo le seguenti successioni esatte corte

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X, \mathcal{N}(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^q(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}(m)) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \longrightarrow H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(m)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$H^0(X, \mathcal{O}_X^q(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \longrightarrow H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(m)) \longrightarrow 0. \quad (4.6)$$

$H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$  è un  $A$ -modulo, quindi possiamo tensorizzare la (4.5) ottenendo

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(m))^q \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes_A k(t) \longrightarrow 0. \quad (4.7)$$

Ricordando che la coomologia commuta con le somme dirette, confrontando la (4.6) con la (4.7) si ottiene

$$H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(m)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes_A k(t),$$

in quanto i morfismi delle successioni (4.6) e (4.7) sono indotti dagli stessi morfismi, definiti in (4.5). ■

### 4.3 Definizione e costruzione

**Definizione 4.8.** Fissato un intero positivo  $r$  e un polinomio  $P(z) \in \mathbb{Q}[x]$ , si definisce *schema di Hilbert*, e si indica con  $\mathcal{Hilb}_{P(z)}^r$ , lo schema parametro della famiglia di sottoschemi chiusi di  $\mathbb{P}^r$  con polinomio di Hilbert  $P(z)$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathbb{P}^r \times \mathcal{Hilb}_{P(z)}^r \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{Hilb}_{P(z)}^r \end{array} \quad (4.8)$$

tale che ogni altra famiglia di sottoschemi chiusi di  $\mathbb{P}^r$  con queste caratteristiche si ricava da (4.8) con un'estensione di base (pullback).

Per ogni altra famiglia  $\mathcal{Y} \rightarrow S$  di sottoschemi di  $\mathbb{P}^r$  con polinomio di Hilbert  $P(z)$ , deve quindi esistere un'estensione di base  $S \rightarrow \mathcal{Hilb}_{P(z)}^r$  tale che  $\mathcal{Y} \simeq \mathcal{X} \times_{\mathcal{Hilb}} S$ ,

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{X} \times_{\mathcal{Hilb}} S & \longrightarrow & \mathcal{X} & & \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & \mathbb{P}^r \times S & \longrightarrow & \mathbb{P}^r \times \mathcal{Hilb}_{P(z)}^r \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & S & \longrightarrow & \mathcal{Hilb}_{P(z)}^r
 \end{array}$$

cioè  $\mathcal{Y}$  deve essere isomorfo all'estensione di  $\mathcal{X}$  al nuovo schema parametro  $S$ .

A questo punto bisogna dimostrare che questo schema esiste. La parte restante del capitolo è dedicata all'introduzione degli strumenti usati nella dimostrazione e alla dimostrazione stessa.

### 4.3.1 Regolarità di Castelnuovo-Mumford

**Definizione 4.9.** Fissato un intero  $m \in \mathbb{Z}$ , un fascio coerente  $\mathcal{F}$  su  $\mathbb{P}^r$  si dice *m-regolare* se

$$H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(m-i)) = 0, \quad \forall i \geq 1. \quad (4.9)$$

**Proposizione 4.5.** Siano  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  due fasci coerenti su  $\mathbb{P}^r$ , con  $\mathcal{F}$  *m-regolare*. Se la successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0 \quad (4.10)$$

è esatta allora anche il fascio  $\mathcal{G}$  è *m-regolare*.

*Dimostrazione.* Tensorizzando la successione (4.10) per  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m-i)$ , con  $i > 0$ , otteniamo

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(m-i-1) \longrightarrow \mathcal{F}(m-i) \longrightarrow \mathcal{G}(m-i) \longrightarrow 0,$$

e passando alla successione esatta lunga in coomologia

$$\dots \rightarrow H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(m-i)) \rightarrow H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{G}(m-i)) \rightarrow H^{i+1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(m-i-1)) \rightarrow \dots$$

ma  $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(m-i))$  e  $H^{i+1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(m-i-1)) = H^{i+1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(m-(i+1)))$  sono nulli per ipotesi, quindi anche  $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{G}(m-i))$  è nullo per ogni  $i > 0$ . ■

**Proposizione 4.6.** Sia  $\mathcal{F}$  un fascio coerente *m-regolare* su  $\mathbb{P}^r$ .

1. Il morfismo canonico

$$H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(k)) \otimes H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(k+1))$$

è suriettivo per ogni  $k \geq m$ .



2.  $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(k)) = 0, \forall i \geq 1, \forall k \geq m - i$ ; inoltre  $\mathcal{F}$  è  $n$ -regolare per ogni  $n \geq m$ .

3.  $\mathcal{F}(k)$  è generato dalle sue sezioni globali per ogni  $k \geq m$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo le affermazioni 1. e 2. per induzione su  $r$ . Per  $r = 0$  non c'è nulla da dimostrare, quindi supponiamo che la proposizione sia vera per un certo  $r - 1 \geq 0$ . Consideriamo un iperpiano  $H$  che non contenga alcuna componente irriducibile del supporto di  $\mathcal{F}$ .  $H$  è individuato da un elemento  $h$  di  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ , pertanto abbiamo la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-1) \xrightarrow{h} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow 0. \quad (4.11)$$

Tensorizzando per  $\mathcal{F}$ , posto  $\mathcal{F}_H = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H$ , otteniamo

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_H \longrightarrow 0, \quad (4.12)$$

quindi per la proposizione 4.5,  $\mathcal{F}_H$  è  $m$ -regolare.  $\mathcal{F}_H$  è un fascio coerente su  $\mathbb{P}^{r-1}$ , quindi per  $\mathcal{F}_H$ , valgono le affermazioni della proposizione. Per ogni  $i > 0$ , se tensorizziamo la (4.11) per  $\mathcal{F}(m - i)$  e consideriamo la successione lunga indotta in coomologia, troviamo il segmento

$$\dots \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{F}(m - i - 1)) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{F}(m - i)) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{F}_H(m - i)) \rightarrow \dots$$

Per ipotesi di  $m$ -regolarità il primo termine è nullo, ed è nullo anche il terzo termine per l'ipotesi induttiva 2. su  $\mathcal{F}_H$ , quindi

$$H^{i+1}(\mathcal{F}(m - i)) = H^{i+1}(\mathcal{F}((m + 1) - (i + 1))) = 0,$$

cioè  $\mathcal{F}$  è  $(m + 1)$ -regolare. Iterando questo procedimento si dimostra la  $n$ -regolarità di  $\mathcal{F}$  per ogni  $n \geq m$ .

Per dimostrare il punto 1., consideriamo i segmenti iniziali delle successioni lunghe in coomologia indotte dalla (4.12) tensorizzata per  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k)$  (tensorizziamo  $\mathcal{F}_H$  per  $\mathcal{O}_H(k)$  in quanto fuori da  $H$  il fascio  $\mathcal{F}_H$  è nullo) e per  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k + 1)$  ( $\mathcal{O}_H(k + 1)$ )

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathcal{F}(k - 1)) \rightarrow H^0(\mathcal{F}(k)) \rightarrow H^0(\mathcal{F}_H(k)) \rightarrow \dots, \\ 0 \rightarrow H^0(\mathcal{F}(k)) \rightarrow H^0(\mathcal{F}(k + 1)) \rightarrow H^0(\mathcal{F}_H(k + 1)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Tensorizzando per  $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$  la prima successione (per  $H^0(\mathcal{O}_H(1))$  nel caso di  $\mathcal{F}_H$ ), otteniamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(\mathcal{F}(k)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) & & H^0(\mathcal{F}(k)) \\
 \downarrow \varphi & \searrow \alpha & \downarrow \\
 H^0(\mathcal{F}_H(k)) \otimes H^0(\mathcal{O}_H(1)) \circlearrowleft & & H^0(\mathcal{F}(k+1)) \\
 \downarrow & \searrow \beta & \downarrow \psi \\
 H^1(\mathcal{F}(k-1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) & & H^0(\mathcal{F}_H(k+1)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Per ogni  $k \geq m$ ,  $H^1(\mathcal{F}(k-1))$  è nullo per il punto 2., quindi la mappa  $\varphi$  è suriettiva, ed è suriettivo anche il morfismo  $\beta$  per l'ipotesi induttiva 1. valida su  $\mathcal{F}_H$ : quindi la composizione  $\psi \circ \alpha$  è suriettiva.  $H^0(\mathcal{F}(k+1))$  è generato quindi dall'immagine di  $\alpha$  e da  $H^0(\mathcal{F}(k))$ , ma il morfismo che immerge  $H^0(\mathcal{F}(k))$  in  $H^0(\mathcal{F}(k+1))$  è indotto dalla moltiplicazione per  $h$ ; dal momento che  $h \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$ ,  $H^0(\mathcal{F}(k)) \subseteq \text{im } \alpha$ , quindi  $H^0(\mathcal{F}(k+1))$  è generato da  $\text{im } \alpha$ , cioè  $\alpha$  è suriettiva.

Per dimostrare 3., consideriamo  $d$  sufficientemente grande, tale che  $\mathcal{F}(m+d)$  è generato da sezioni globali ([Hart, Ch. II, Th. 5.17]). Per 1. abbiamo la suriezione

$$H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d)) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}(m+d)) \longrightarrow 0,$$

che tensorizzata per  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ , dà come risultato

$$H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \rightarrow H^0(\mathcal{F}(m+d)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \rightarrow \mathcal{F}(m+d) \rightarrow 0.$$

Tensorizzando infine per  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-d)$ , si deduce

$$H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-d) \rightarrow H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \rightarrow \mathcal{F}(m) \rightarrow 0,$$

da cui

$$H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \rightarrow \mathcal{F}(m) \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

**Corollario 4.7.** *Sia  $\mathcal{F}$  un fascio coerente  $m$ -regolare su  $\mathbb{P}^r$ . Il modulo*

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(k)),$$

sull'anello dei polinomi  $k[X_0, \dots, X_r]$ , è generato da elementi di grado minore o uguale ad  $m$ .

*Dimostrazione.* Per la proposizione precedente, per ogni  $d \geq 1$ , abbiamo la suriezione

$$H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d)) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}(m+d)).$$

In particolare se abbiamo un fascio di ideali  $\mathcal{I}$ , l'ideale

$$\mathfrak{i} = \Gamma_*(\mathcal{I}) \subseteq k[X_0, \dots, X_r]$$

è generato da polinomi di grado  $\leq m$ . ■

**Proposizione 4.8.** *Siano  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  due fasci coerenti su  $\mathbb{P}^r$  tali che la successione*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0 \quad (4.13)$$

*sia esatta. Se  $\mathcal{G}$  è  $m$ -regolare, allora*

1.  $H^i(\mathcal{F}(n)) = 0, \forall i \geq 2 \text{ e } \forall n \geq m - i$ ;
2.  $\dim H^1(\mathcal{F}(n-1)) \geq \dim H^1(\mathcal{F}(n)), \forall n \geq m - 1$ ;
3.  $H^1(\mathcal{F}(n)) = 0, \forall n \geq (m-1) + \dim H^1(\mathcal{F}(m-1))$ .

*Dimostrazione.* Tensorizziamo la 4.13 per  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)$  e consideriamo la successione indotta in coomologia

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(\mathcal{G}(n)) \rightarrow H^i(\mathcal{F}(n-1)) \rightarrow H^i(\mathcal{F}(n)) \rightarrow H^i(\mathcal{G}(n)) \rightarrow \dots$$

Per la Proposizione 4.6, abbiamo che il primo termine e l'ultimo sono nulli per ogni  $i-1 \geq 1$  e per ogni  $n \geq m-i+1$ , quindi per  $i \geq 2$

$$H^i(\mathcal{F}(m-i)) \simeq H^i(\mathcal{F}(m-i+1)) \simeq \dots \simeq H^i(\mathcal{F}(m-i+d)) \simeq \dots$$

Il Teorema 3.18 di Serre ci assicura che per  $d \gg 0$   $H^i(\mathcal{F}(m-i+d))$  è nullo, il che dimostra il punto 1.

Fissato  $i = 1$ , per  $n \geq m-1$ , per la Proposizione 4.6,  $H^1(\mathcal{G}(n)) = 0$ , quindi abbiamo la suriezione

$$H^1(\mathcal{F}(n-1)) \longrightarrow H^1(\mathcal{F}(n)) \longrightarrow 0,$$

da cui si dimostra il punto 2.

Consideriamo ora  $n = m-1$ . Abbiamo la successione di coomologia

$$H^0(\mathcal{F}(m-1)) \xrightarrow{\varphi} H^0(\mathcal{G}(m-1)) \rightarrow H^1(\mathcal{F}(m-2)) \rightarrow H^1(\mathcal{F}(m-1)) \rightarrow 0.$$

Se  $\varphi$  è suriettiva, allora  $H^1(\mathcal{F}(m-1)) = 0$ ; procedendo quindi induttivamente si dimostra che  $H^1(\mathcal{F}(n)) = 0, \forall n \geq m-1$ . Se invece  $\varphi$  non è suriettiva,  $H^1(\mathcal{F}(m-1))$  è non nullo e abbiamo la disuguaglianza stretta

$$\dim H^1(\mathcal{F}(m-2)) > \dim H^1(\mathcal{F}(m-1));$$

procedendo induttivamente si dimostra facilmente

$$\dim H^1(\mathcal{F}(m-2)) > \dim H^1(\mathcal{F}(m-1)) > \dim H^1(\mathcal{F}(m)) > \dots$$

Pertanto a partire da  $\mathcal{F}(m-1)$ , dopo al più  $\dim H^1(\mathcal{F}(m-1))$  passi, il primo gruppo di coomologia si annulla cioè

$$H^1(\mathcal{F}(n)) = 0, \quad \text{per ogni } n \geq m-1 + \dim H^1(\mathcal{F}(m-1)). \quad \blacksquare$$

**Corollario 4.9.** *Nelle ipotesi della proposizione precedente, il fascio  $\mathcal{F}$  su  $\mathbb{P}^r$  è  $m + \dim H^1(\mathcal{F}(m-1))$ -regolare.*

*Dimostrazione.* Posto  $h = \dim H^1(\mathcal{F}(m-1))$ , per il punto 3. della Proposizione 4.8

$$H^1(\mathcal{F}(m+h-1)) = 0,$$

mentre per il punto 1.,  $\forall i \geq 2$ ,

$$H^i(\mathcal{F}(m+h-i)) = 0,$$

in quanto  $m+h-i \geq m-i$ . ■

*Osservazione 4.10.* Nelle ipotesi della Proposizione 4.8, dal punto 1. segue immediatamente che per  $n \geq m-1$

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(\mathcal{F}(n)) = \dim H^0(\mathcal{F}(n)) - \dim H^1(\mathcal{F}(n)).$$

A questo punto, abbiamo bisogno di alcuni strumenti per calcolare concretamente la regolarità di Castelnuovo-Mumford di un fascio coerente.

**Definizione 4.11.** Sia  $\mathcal{F}$  un fascio coerente su  $\mathbb{P}^r$  e siano  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  delle sezioni di  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ . Si dice che la successione  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  è  $\mathcal{F}$ -regolare, se la moltiplicazione per queste sezioni induce le seguenti successioni esatte:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{\sigma_1} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{F}_1(-1) \xrightarrow{\sigma_2} \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow 0, \\ &\vdots \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{F}_{j-1}(-1) \xrightarrow{\sigma_j} \mathcal{F}_{j-1} \longrightarrow \mathcal{F}_j \longrightarrow 0, \\ &\vdots \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{F}_{N-1}(-1) \xrightarrow{\sigma_N} \mathcal{F}_{N-1} \longrightarrow \mathcal{F}_N \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Dalla prima successione, si deduce

$$\mathcal{F}_1 \simeq \frac{\mathcal{F}}{\sigma_1 \mathcal{F}(-1)},$$

quindi dalla seconda

$$\mathcal{F}_2 \simeq \frac{\mathcal{F}_1}{\sigma_2 \mathcal{F}_1(-1)} \simeq \frac{\mathcal{F}}{(\sigma_1, \sigma_2) \mathcal{F}(-1)},$$

fino a

$$\mathcal{F}_N \simeq \frac{\mathcal{F}_{N-1}}{\sigma_N \mathcal{F}_{N-1}(-1)} \simeq \frac{\mathcal{F}}{(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \mathcal{F}(-1)}.$$

**Definizione 4.12.** Sia  $\mathcal{F}$  un fascio coerente su  $\mathbb{P}^r$  e  $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_N) \in \mathbb{N}^n$  una sequenza di interi non negativi tali che  $N \geq \dim \text{Supp } \mathcal{F}$ . Diciamo che  $\mathcal{F}$  è un  $\mathbf{b}$ -fascio se esiste una sequenza di sezioni  $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$   $\mathcal{F}$ -regolare, tale che

$$\dim H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_i(-1)) \leq b_i, \quad \forall i = 0, \dots, N, \quad (4.14)$$

dove  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}_i = \mathcal{F} / (\sigma_1, \dots, \sigma_i) \mathcal{F}(-1)$ , per  $i > 0$ .

**Lemma 4.10.** Data la successione esatta di fasci coerenti su  $\mathbb{P}^r$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0, \quad (4.15)$$

se

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \sum_{j=0}^r a_j \binom{n+j}{j}$$

allora

$$\chi(\mathcal{G}(n)) = \sum_{j=0}^{r-1} a_{j+1} \binom{n+j}{j}.$$

*Dimostrazione.* Tensorizzando la (4.15) per  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)$ , utilizziamo il Lemma 4.1 per dedurre

$$\chi(\mathcal{G}(n)) = \chi(\mathcal{F}(n)) - \chi(\mathcal{F}(n-1)),$$

quindi

$$\chi(\mathcal{G}(n)) = \sum_{j=0}^r a_j \left[ \binom{n+j}{j} - \binom{n-1+j}{j} \right] = \sum_{j=0}^r a_j \binom{n+j-1}{j-1}.$$

Dal momento che per  $j = 0$ ,  $\binom{n+j-1}{j-1} = 0$ , si ottiene la tesi applicando la sostituzione di indice  $j-1 \leftarrow j$ . ■

**Proposizione 4.11.** Dato un  $\mathbf{b}$ -fascio  $\mathcal{F}$ , con  $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_N)$  e  $N = \dim \text{Supp } \mathcal{F}$ , sia

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \sum_{j=0}^N a_j \binom{n+j}{j}.$$

Allora

$$1. \forall n \geq -1, \dim H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(n)) \leq \sum_{j=0}^N b_j \binom{n+j}{j};$$

2.  $a_N \geq b_N$  e  $\mathcal{F}$  è un  $(b_0, \dots, b_{N-1}, a_N)$ -fascio.

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sulla dimensione del supporto di  $\mathcal{F}$ . Se  $N = 0$ , il fascio ha caratteristica di Eulero costante cioè

$$a_0 = \dim H^0(\mathcal{F}) = \dim H^0(\mathcal{F}(-1)) \leq b_0$$

ed  $\mathcal{F}$  risulta essere un  $(a_0)$ -fascio. Supponiamo ora che la proposizione sia valida per un certo  $N - 1 \geq 0$  e consideriamo  $\mathcal{F}$ ,  $\mathbf{b}$ -fascio con  $\dim \text{Supp } \mathcal{F} = N$ . La moltiplicazione per la prima sezione  $\sigma_1$ , ci dà la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow 0; \quad (4.16)$$

$\mathcal{F}_1$  è un  $(b_1, \dots, b_N)$ -fascio e  $\dim \text{Supp } \mathcal{F}_1 = N - 1$ , quindi per ipotesi induttiva

$$\dim H^0(\mathcal{F}_1(n)) \leq \sum_{j=0}^{N-1} b_{j+1} \binom{n+j}{j} = \sum_{j=0}^N b_j \binom{n+j-1}{j-1}, \quad \forall n \geq -1,$$

in quanto  $\binom{n-1}{-1} = 0$ . Tensorizzata la (4.16) per  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)$ , consideriamo la successione indotta in coomologia troncata al primo grado:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{F}(n-1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}(n)) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}_1(n)) \longrightarrow V \longrightarrow 0;$$

ne deduciamo

$$\dim H^0(\mathcal{F}(n)) - \dim H^0(\mathcal{F}(n-1)) \leq \dim H^0(\mathcal{F}_1(n)).$$

Per ipotesi  $\dim H^0(\mathcal{F}(-1)) \leq b_0$ , quindi per  $n = 0$ , abbiamo

$$\dim H^0(\mathcal{F}) \leq b_0 + \sum_{j=0}^{N-1} b_{j+1} \binom{j}{j} = \sum_{j=0}^N b_j = \sum_{j=0}^N b_j \binom{0+j}{j}.$$

Procedendo per induzione, al passo  $n$ -esimo abbiamo

$$\begin{aligned} \dim H^0(\mathcal{F}(n)) &\leq \dim H^0(\mathcal{F}(n-1)) + \dim H^0(\mathcal{F}_1(n)) \\ &\leq \sum_{j=0}^N b_j \binom{n-1+j}{j} + \sum_{j=0}^N b_j \binom{n+j-1}{j-1} = \sum_{j=0}^N b_j \binom{n+j}{j}. \end{aligned}$$

Sempre per induzione dimostriamo il punto 2. Dal Lemma 4.10, si ricava

$$\chi(\mathcal{F}_1(n)) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{j+1} \binom{n+j}{j},$$

ma essendo  $\mathcal{F}_1$  un  $(b_1, \dots, b_N)$ -fascio con  $\dim \text{Supp } \mathcal{F}_1 = N - 1$ , su  $\mathcal{F}_1$  vale la proposizione, quindi  $a_N \leq b_N$  e  $\mathcal{F}_1$  è un  $(b_1, \dots, b_{N-1}, a_N)$ -fascio, da cui si deduce che  $\mathcal{F}$  è un  $(b_0, \dots, b_{N-1}, a_N)$ -fascio. ■

**Definizione 4.13.** Per ogni intero  $s \geq -1$ , definiamo  $\mathbf{b}$ -polinomi i seguenti polinomi costruiti induttivamente a partire da  $P_{-1} = 0$  come

$$P_s(X_0, \dots, X_s) = P_{s-1}(X_1, \dots, X_s) + \sum_{j=0}^s X_j \binom{P_{s-1}(X_1, \dots, X_s) - 1 + j}{j}.$$

**Esempio 4.14.** Costruiamo esplicitamente i primi  $\mathbf{b}$ -polinomi<sup>(\*)</sup>:

$$\begin{aligned} P_{-1} &= 0, \\ P_0(X_0) &= P_{-1} + \sum_{j=0}^0 X_j \binom{P_{-1} - 1 + j}{j} = X_0 \binom{-1}{0} = X_0, \\ P_1(X_0, X_1) &= P_0(X_1) + \sum_{j=0}^1 X_j \binom{P_0(X_1) - 1 + j}{j} = \\ &= X_1 + X_0 \binom{X_1 - 1}{0} + X_1 \binom{X_1}{1} = X_0 + X_1 + X_1^2, \\ P_2(X_0, X_1, X_2) &= P_1(X_1, X_2) + \sum_{j=0}^2 X_j \binom{P_1(X_1, X_2) - 1 + j}{j} = \\ &= P_1(X_1, X_2) + X_0 + X_1 P_1(X_1, X_2) + \\ &\quad + X_2 \frac{(P_1(X_1, X_2) + 1) P_1(X_1, X_2)}{2} = \\ &= X_0 + X_1 + X_2 + X_1^2 + \frac{3X_1 X_2}{2} + \frac{3X_2^2}{2} + \frac{X_1^2 X_2}{2} + \\ &\quad + 2X_1 X_2^2 + X_2^3 + X_1 X_2^3 + X_2^4 + \frac{X_2^5}{2} \end{aligned}$$

*Osservazione 4.15.* Per ogni  $t < r$ , si può dimostrare che

$$P_r(X_0, \dots, X_t, 0, \dots, 0) = P_t(X_0, \dots, X_t).$$

**Teorema 4.12.** Sia  $\mathcal{F}$  un  $\mathbf{b}$ -fascio su  $\mathbb{P}^r$ , con  $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_N)$ , e sia

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \sum_{j=0}^r a_j \binom{n+j}{j}$$

il suo polinomio di Hilbert. Sia  $(c_0, \dots, c_r)$  una successione di interi tali che per ogni  $i = 0, \dots, r$ ,  $c_i \geq b_i - a_i$ , allora  $m = P_r(c_0, \dots, c_r) \geq 0$  e  $\mathcal{F}$  è  $m$ -regolare. In particolare, se  $N = \dim \text{Supp } \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}$  è  $P_{N-1}(c_0, \dots, c_{N-1})$ -regolare.

*Dimostrazione.* Dimostriamo anche questo teorema procedendo induttivamente su  $r$ . Se  $r = 0$ ,  $\mathbb{P}^r$  è formato da un solo punto, pertanto  $\mathcal{F}$  deve essere costante,

---

<sup>(\*)</sup>Nella costruzione di questi polinomi si usa la convenzione

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{1} - \binom{n-1}{1} = n - (n-1) = 1$$

per ogni intero  $n \in \mathbb{Z}$ .

cioè  $m = P_0(0) = 0$ , quindi  $\mathcal{F}$  è un  $P_{-1}$ -fascio. Supponiamo ora  $r \geq 1$ ; abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow 0,$$

dove  $\mathcal{F}_1$  è un  $(b_1, \dots, b_N)$ -fascio con supporto su  $\mathbb{P}^{r-1}$ , quindi per  $\mathcal{F}_1$  vale il teorema. Dal Lemma 4.10 sappiamo che il polinomio di Hilbert di  $\mathcal{F}_1$  è  $\sum_{j=0}^{r-1} a_{j+1} \binom{n+j}{j}$ , di conseguenza presi  $c_1, \dots, c_r$  tali che  $c_j \geq b_j - a_j$ ,  $\forall j = 1, \dots, r$ , posto  $p = P_{r-1}(c_1, \dots, c_r) \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_1$  risulta essere  $p$ -regolare.

Per la Proposizione 4.8,  $\mathcal{F}$  è  $p + \dim H^1(\mathcal{F}(p-1))$ -regolare; è possibile precisare  $\dim H^1(\mathcal{F}(p-1))$ , infatti dall'Osservazione 4.10 si deduce

$$\dim H^1(\mathcal{F}(p-1)) = \dim H^0(\mathcal{F}(p-1)) - \chi(\mathcal{F}(p-1))$$

e ricordando la Proposizione 4.11, si ottiene

$$\begin{aligned} \dim H^1(\mathcal{F}(p-1)) &\leq \sum_{j=0}^r b_j \binom{p-1+j}{j} - \sum_{j=0}^r a_j \binom{p-1+j}{j} \\ &\leq \sum_{j=0}^r (b_j - a_j) \binom{p-1+j}{j}. \end{aligned}$$

Scelto  $c_0 \geq b_0 - a_0$ , applicando la Proposizione 4.6, possiamo affermare che  $\mathcal{F}$  è  $p + \sum_{j=0}^r c_j \binom{p-1+j}{j}$ -regolare; inoltre dalla definizione di  $\mathbf{b}$ -polinomi

$$\begin{aligned} p + \sum_{j=0}^r c_j \binom{p-1+j}{j} &= P_{r-1}(c_1, \dots, c_r) + \sum_{j=0}^r c_j \binom{P_{r-1}(c_1, \dots, c_r) - 1 + j}{j} = \\ &= P_r(c_0, \dots, c_r). \end{aligned}$$

Concludendo, se  $N = \dim \text{Supp } \mathcal{F}$ , la Proposizione 4.11 ci assicura che  $\mathcal{F}$  è anche un  $(b_0, \dots, b_{N-1}, a_N)$ -fascio, pertanto è possibile scegliere  $c_N = 0$ , da cui  $\mathcal{F}$  è  $P_{N-1}(c_0, \dots, c_{N-1})$ -regolare per l'Osservazione 4.15. ■

**Corollario 4.13.** *Per ogni  $r \geq 0$ , esiste un polinomio  $F_r(X_0, \dots, X_r)$  tale che ogni fascio di ideali  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ , con polinomio di Hilbert*

$$\chi(\mathcal{I}(n)) = \sum_{j=0}^r a_j \binom{n+j}{j},$$

è  $F_r(a_0, \dots, a_r)$ -regolare e  $F_r(a_0, \dots, a_r) \geq 0$ .

*Dimostrazione.*  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$  è uno  $\mathbf{0}$ -fascio, in quanto

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-1)) = 0,$$

di conseguenza ogni fascio di ideali  $\mathcal{I}$  è uno  $\mathbf{0}$ -fascio. Applicando ora il Teorema 4.12, possiamo scegliere  $c_0 = -a_0, \dots, c_r = -a_r$  e posto  $F_r(X_0, \dots, X_r) = P_r(-X_0, \dots, -X_r)$ , si deduce che  $\mathcal{I}$  è  $F_r(a_0, \dots, a_r)$ -regolare. ■



*Osservazione 4.16.* Nel caso di un fascio coerente  $\mathcal{F}$  qualsiasi, il calcolo della regolarità mediante i  $\mathbf{b}$ -polinomi dipende dal polinomio di Hilbert e dalle sezioni  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  che determinano la sequenza di interi  $(b_0, \dots, b_N)$ , mentre nel caso di un fascio di ideali dipende esclusivamente dai coefficienti  $a_0, \dots, a_r$ .

**Esempio 4.17.** Consideriamo un fascio di ideali  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$  con polinomio di Hilbert

$$Q(z) = \frac{z^2}{2} - \frac{3}{2}z.$$

Innanzitutto scriviamo il polinomio  $Q$  come somma di binomiali secondo la Proposizione 1.17:

$$Q(z) = 2 \binom{z}{0} - 3 \binom{z+1}{1} + \binom{z+2}{2}.$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} F_2(2, -3, 1) &= P_2(-2, 3, -1) = P_1(3, -1) + (-2) \binom{P_1(3, -1) - 1}{0} + \\ &\quad + 3 \binom{P_1(3, -1)}{1} + (-1) \binom{P_1(3, -1) + 1}{2} = \\ &= 3 - 2 + 3 \binom{3}{1} - \binom{4}{2} = 4, \end{aligned}$$

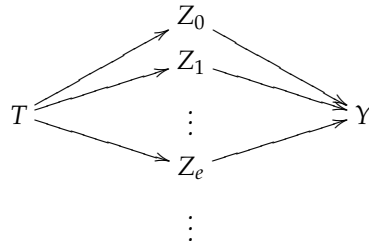
quindi il fascio  $\mathcal{I}$  è 4-regolare.

### 4.3.2 Flattening stratification

**Definizione 4.18.** Dato uno schema  $Y$ , una *stratificazione* di  $Y$  consiste in un insieme finito di sottoschemi chiusi  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  di  $Y$ , chiamati *strati*, a due a due disgiunti, con un morfismo suriettivo

$$\coprod_{1 \leq j \leq n} Y_j \rightarrow Y.$$

**Teorema 4.14.** Sia  $Y$  uno schema e  $\mathcal{F}$  un fascio coerente su di esso. Esiste un'unica stratificazione  $\{Z_e\}_{e \geq 0}$  di  $Y$  tale che dato il morfismo di schemi  $\varphi : T \rightarrow Y$ , il fascio  $\varphi^*(\mathcal{F})$  è localmente libero se e solo se  $\varphi$  fattorizza sull'unione disgiunta degli strati  $Z_e$ :



Inoltre  $\forall e \geq 0$ , la restrizione di  $\mathcal{F}$  allo strato  $Z_e$  è localmente libera di rango  $e$ . Infine la stratificazione  $\{Z_e\}$  commuta con l'estensione di base.

*Dimostrazione.* Consideriamo un punto  $y$  di  $Y$ , con la corrispondente spiga  $\mathcal{F}_y$  e il corrispondente campo residuo  $k(y)$ , e poniamo

$$d_y = \dim_{k(y)} \mathcal{F}_y \otimes k(y).$$

Possiamo scegliere  $d_y$  elementi  $a_1, \dots, a_{d_y} \in \mathcal{F}_y$ , tali che le loro immagini in  $\mathcal{F}_y \otimes k(y)$  formino una base di questo spazio vettoriale; per il Lemma di Nakayama, il morfismo  $f_y : \mathcal{O}_{Y,y}^{d_y} \rightarrow \mathcal{F}_y$  definito da  $a_1, \dots, a_{d_y}$  è suriettivo e può essere esteso ad morfismo  $f$  su un intorno  $U$  di  $y$ . Ripetendo il ragionamento su  $\ker f_y$ , siamo in grado di trovare un intorno aperto  $U_y$  di  $y$  e una presentazione del fascio  $\mathcal{F}$  ristretto a tale aperto:

$$\mathcal{O}_{U_y}^{e_y} \xrightarrow{g} \mathcal{O}_{U_y}^{d_y} \xrightarrow{f} \mathcal{F}|_{U_y} \longrightarrow 0. \quad (4.17)$$

- (i) Dal momento che questo morfismo induce un morfismo suriettivo sulla spiga di un qualsiasi punto  $x \in U_y$ , abbiamo che

$$d_x \leq d_y, \quad \forall x \in U_y.$$

Il morfismo  $g$  è rappresentato da una matrice  $(g_{ij})$  di dimensione  $d_y \cdot e_y$  con valori in  $H^0(U_y, \mathcal{O}_Y)$ .

- (ii) L'ideale generato dagli elementi  $g_{ij}$  in  $H^0(U_y, \mathcal{O}_Y)$  definisce un sottoschema  $Z_y \subseteq U_y$ , il cui supporto è  $Y_{d_y} \cap U_y$ , dove  $Y_{d_y} = \{x \in Y \mid d_x = d_y\}$ .

Considerato un morfismo  $\varphi : T \rightarrow U_y$ , supponiamo che  $\varphi$  fattorizzi su  $Z_y$ .

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & U_y \\ & \searrow & \nearrow \\ & & Z_y \end{array}$$

Dalla (4.17) otteniamo

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_{U_y}^{e_y} & \xrightarrow{g} & \mathcal{O}_{U_y}^{d_y} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}|_{U_y} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}_{Z_y}^{e_y} & \xrightarrow{0} & \mathcal{O}_{Z_y}^{d_y} & \longrightarrow & \mathcal{F}|_{Z_y} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}_T^{e_y} & \xrightarrow{\varphi^* g} & \mathcal{O}_T^{d_y} & \xrightarrow{\varphi^* f} & \varphi^*(\mathcal{F}|_{U_y}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

quindi gli elementi  $\varphi^*(g_{ij})$  valgono 0 su  $T$ , pertanto  $\varphi^*f$  risulta essere un isomorfismo e  $\varphi^*(\mathcal{F})$  un fascio localmente libero di rango  $d_y$ . Viceversa se  $\varphi^*(\mathcal{F})$  è localmente libero di rango  $d_y$ , abbiamo in ogni punto  $t$  di  $T$  la successione

$$0 \longrightarrow \ker \varphi^*f \otimes k(t) \longrightarrow k(t)^{d_y} \longrightarrow \varphi^*(\mathcal{F}) \otimes k(t) \longrightarrow 0,$$

ma  $k(t)^{d_y}$  e  $\varphi^*(\mathcal{F}) \otimes k(t)$  sono isomorfi in quanto spazi vettoriali della stessa dimensione, quindi  $\ker \varphi^*f \otimes k(t) = 0$ , da cui si deduce per il Lemma di Nakayama che  $\ker \varphi^*f = 0$  in un intorno di  $t$ , e quindi ovunque. Pertanto ogni matrice di presentazione  $\varphi^*(g)$  manda tutto in 0.

(iii) Dato un morfismo  $\varphi : T \rightarrow U_y$ ,  $\varphi^*(\mathcal{F})$  è localmente libero di rango  $d_y$  se e solo se  $\varphi$  fattorizza sullo schema  $Z_y$ .

La costruzione di  $Z_y$  non dipende dalla presentazione 4.17, quindi presi due elementi  $y$  e  $y'$  in  $Y$ ,  $Z_y$  e  $Z_{y'}$  coincidono sull'intersezione  $U_y \cap U_{y'}$ .

(iv) Riorganizzando la famiglia di sottoschemi  $\{Z_y \mid y \in Y\}$  in base alla dimensione  $d$  delle spighe in sottoschemi  $Z_d$  con supporto su  $Y_d$ , costruisco la stratificazione  $\{Z_d\}_{d \geq 0}$  indotta da  $\mathcal{F}$ .

Per costruzione quindi  $\mathcal{F}$  ristretto ad un qualsiasi  $Z_d$  è localmente libero di grado  $d$ .

(v) Dalla (i) si deduce facilmente che  $\overline{Z}_d \subseteq \bigcup_{e \geq d} Z_e$ .

Le buone proprietà del prodotto tensoriale, utilizzate come per dimostrare il punto (iii), consentono di dimostrare che la stratificazione commuta con l'estensione di base. ■

**Definizione 4.19.** Dato uno schema  $Y$ , si consideri un fascio coerente  $\mathcal{F}$  su  $\mathbb{P}^r \times Y$ . Una *flattening stratification* di  $Y$  è una stratificazione  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  tale che per ogni morfismo  $\varphi : T \rightarrow Y$ , il fascio

$$\mathcal{F}_\varphi = (1 \times \varphi)^*(\mathcal{F})$$

è piatto su  $\mathbb{P}^r \times T$  se e solo se  $\varphi$  fattorizza sull'unione disgiunta  $\coprod Y_j$ .

**Lemma 4.15.** Per ogni fascio  $\mathcal{F}$  su  $\mathbb{P}^r \times Y$ , la flattening stratification esiste.

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione di questo risultato tecnico, si veda [Sern, Ch. 4, Th. 4.2.11]. ■

### 4.3.3 Il caso delle ipersuperfici

**Proposizione 4.16.** *Una ipersuperficie  $X \subseteq \mathbb{P}^r$  di grado  $d$  ha polinomio di Hilbert*

$$h(n) = \binom{n+r}{r} - \binom{n+r-d}{r}.$$

*Viceversa, ogni sottoschema chiuso  $Y$  di  $\mathbb{P}^r$  con polinomio di Hilbert  $h(n)$  è una ipersuperficie di grado  $d$ .*

*Dimostrazione.* Una ipersuperficie  $X$  di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^r$  è definita da un elemento  $f \in H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d))$ , che genera la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-d) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Tensorizzando per  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)$ , con  $n$  qualsiasi, e utilizzando il Lemma 4.1, otteniamo

$$\begin{aligned} h(n) &= \chi(\mathcal{O}_X(n)) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n-d)) = \\ &= \binom{n+r}{r} - \binom{n-d+r}{r} = \frac{d}{(r-1)!} n^{r-1} + \dots \end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo che un certo sottoschema  $Y$  di  $\mathbb{P}^r$  abbia polinomio di Hilbert  $h(n)$ . Il grado di  $h(n)$  è  $r-1$ , pertanto  $\dim Y = r-1$ <sup>(†)</sup>. Supponiamo che  $Y$  si decomponga nell'unione  $Y_1 \cup Z$ , con  $Y_1$  ipersuperficie e  $Z$  di dimensione minore di  $r-1$ . Consideriamo i fasci di ideali  $\mathcal{I}_Y, \mathcal{I}_{Y_1}$  corrispondenti agli schemi  $Y$  e  $Y_1$  e la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{Y_1}/\mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_1} \longrightarrow 0.$$

Chiamato  $h_1(n)$  il polinomio di Hilbert di  $Y_1$ , abbiamo

$$h(n) = h_1(n) + k(n),$$

dove  $k(n)$  è il polinomio di Hilbert di  $\mathcal{I}_{Y_1}/\mathcal{I}_Y$ , che avendo supporto su  $Z$  ha grado minore di  $r-1$ . Si deduce che il polinomio di grado massimo in  $h_1$  è

$$\frac{d}{(r-1)!} n^{r-1},$$

ma trattandosi di una ipersuperficie deve essere  $h_1(n) = h(n)$ . Concludendo,  $k(n) = 0$  cioè  $\mathcal{I}_{Y_1} = \mathcal{I}_Y$ , da cui  $Y = Y_1$ . ■

---

<sup>(†)</sup>Vedi [Shaf2, Ch. IV, Sec. 4.2, Th. 2].

**Proposizione 4.17.** *Il polinomio di Hilbert  $p(z)$  di una varietà irriducibile  $X$  ha grado pari alla dimensione di  $X$ .*

**Proposizione 4.18.** *La famiglia delle ipersuperfici di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^r$  è parametrizzata dallo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^{\binom{r+d}{r}-1}$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo l'equazione della generica ipersuperficie  $\sigma$  di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^r$

$$\sum_{|\gamma|=d} c_\gamma X^\gamma = \sum_{|\gamma|=d} c_{\gamma_0 \dots \gamma_r} X_0^{\gamma_0} \cdots X_r^{\gamma_r} = 0.$$

$\sigma$  è determinata univocamente dalle costanti  $c_\gamma$  a meno di multipli; possiamo considerare quindi il morfismo  $\varphi$  che ad ogni ipersuperficie di grado  $d$  associa la sequenza dei coefficienti:

$$\varphi : \sum_{|\gamma|=d} c_\gamma X^\gamma \longmapsto [\dots : c_\gamma : \dots].$$

$[\dots : c_\gamma : \dots]$  appartiene a  $\mathbb{P}^{\binom{r+d}{r}-1}$  in quanto sono  $\binom{r+d}{r}$  i possibili polinomi di grado  $d$  in  $k[X_0, \dots, X_r]$ . Questa corrispondenza tra ipersuperfici e punti è evidentemente biunivoca, possiamo quindi immergere la generica ipersuperficie  $X = \mathcal{V}(\sigma)$  in  $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{\binom{r+d}{r}-1}$  mediante il morfismo

$$(\text{id}, \varphi) : \mathbb{P}^r \longrightarrow \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{\binom{r+d}{r}-1},$$

e costruire il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{\binom{r+d}{r}-1} \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{P}^{\binom{r+d}{r}-1} \end{array} \quad (4.18)$$

dove  $\pi$  è la proiezione sul secondo fattore e  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{r+d}{r}-1}$  è la famiglia di sottoschemi composta dalle ipersuperfici di grado  $d$  parametrizzata da  $\mathbb{P}^{\binom{r+d}{r}-1}$ . ■

**Corollario 4.19.** *Lo schema di Hilbert  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}(z)}^r$ , relativo ai sottoschemi di  $\mathbb{P}^r$  con polinomio di Hilbert  $P(z) = \binom{z+r}{r} - \binom{z-d+r}{r}$ , è isomorfo allo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^{\binom{r+d}{d}-1}$ .*

*Dimostrazione.* Affinché  $\mathbb{P}^{\binom{r+d}{d}-1}$  rappresenti lo schema di Hilbert  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}(z)}^r$ , dobbiamo ancora verificare che ogni altra famiglia di ipersuperfici  $g : \mathcal{Y} \rightarrow S$  si può ottenere come estensione di base da (4.18). Costruiamo il morfismo  $\psi : S \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{r+d}{d}-1}$  punto per punto, pertanto possiamo limitarci al caso  $S = \text{Spec } A$ . Ad ogni punto  $s \in S$  corrisponde l'ipersuperficie  $g^{-1}(s)$  appartenente a  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ , in quanto  $\mathcal{X}$  contiene tutte le ipersuperfici di grado  $d$  di  $\mathbb{P}^r$ ; associamo quindi al punto  $s$  il punto  $\varphi(g^{-1}(s)) \in \mathbb{P}^{\binom{r+d}{d}-1}$ . ■

### 4.3.4 Grassmanniane

Un ruolo importante nella costruzione dello schema di Hilbert è ricoperto dalle grassmanniane. Ricordiamo che la grassmanniana  $G(n, r)$  comprende tutti i sottospazi lineari di  $\mathbb{P}^r$  di dimensione  $n$ . In questa sezione vedremo come dare una struttura di schema proiettivo a  $G(n, r)$  e quale relazione c'è con lo schema di Hilbert  $\mathcal{Hilb}_{\binom{r+n}{n}}$ .

Uno spazio lineare  $\Lambda \subset \mathbb{P}^r$  di dimensione  $n$  può essere descritto fissando  $n + 1$  punti linearmente indipendenti  $p_0, \dots, p_n$ , cioè una matrice con  $n + 1$  righe e  $r + 1$  colonne di rango  $n + 1$ :

$$M = M(\Lambda) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0r} \\ p_{10} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n0} & \cdots & \cdots & p_{nr} \end{pmatrix}.$$

Dal momento che i punti sono dati con coordinate omogenee definite a meno di moltiplicazione per costanti, la matrice  $M$  associata a  $\Lambda$  è unica a meno di moltiplicazione a sinistra per elementi di  $\text{GL}(n + 1)$ . Per ipotesi,  $M$  ha almeno un minore di dimensione  $(n + 1) \times (n + 1)$  invertibile: identifichiamo questo minore con  $M_I$ , dove  $I = \{i_0, \dots, i_n\}$  è il multi-indice composto dagli interi  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_n \leq r$  corrispondenti alle colonne di  $M$  che compongono tale minore. Moltiplicando  $M$  a sinistra per  $M_I^{-1} \in \text{GL}(n + 1)$  trovo una nuova matrice corrispondente a  $\Lambda$ , tale che  $(M_I^{-1} \cdot M)_I$  è la matrice identità e i rimanenti  $(n - r)(n + 1)$  parametri sono univocamente determinati da  $\Lambda$ .

**Proposizione 4.20.**  $G(n, N)$  è uno schema proiettivo.

*Dimostrazione.* Preso uno spazio lineare di dimensione  $n$  in  $\mathbb{P}^r$  con la sua matrice associata  $M$ , fissiamo il multi-indice  $I$  per cui  $\det M_I \neq 0$  e consideriamo la matrice  $M_I^{-1} \cdot M$ . Le matrici di questo tipo hanno una struttura di schema affine: dato il multi-indice  $I = \{i_0, \dots, i_n\}$ ,  $0 \leq i_0 < \dots < i_n \leq r$ , consideriamo lo schema

$$U_I = \text{Spec } k[\dots, u_{jh}, \dots] \simeq \mathbb{A}^{(n+1)(n-r)},$$

dove  $0 \leq j \leq n$  e  $h \in \{0, \dots, r\} \setminus I$ . Ad ogni punto  $u = [\dots, u_{jh}, \dots]$  di  $U_I$  associamo quindi la matrice  $M_u = (m_{ij})$ :

$$m_{ij} = \begin{cases} \delta_{jh}, & \text{se } h \in I \\ u_{jh}, & \text{se } h \notin I \end{cases}$$

dove  $\delta_{jh}$  è il simbolo di Kronecker, e viceversa. I modi possibili di scegliere il multi-indice  $I$  sono  $\binom{r+1}{n+1}$ , pertanto possiamo ricoprire la grassmanniana

$G(n, r)$  con  $\binom{r+1}{n+1}$  copie dello schema affine  $\mathbb{A}^{(n+1)(r-n)}$ . Affinché  $G(n, r)$  sia uno schema, per ogni coppia di multi-indici  $I, J$  gli schemi  $U_I$  e  $U_J$  devono essere compatibili sull'intersezione.  $U_I$  corrisponde alle matrici  $M$  di  $G(n, r)$  con determinante di  $M_I$  non nullo e  $U_J$  alle matrici con  $\det M_J \neq 0$ , quindi l'intersezione comprende le matrici di  $G(n, r)$  con  $\det M_I \neq 0$  e  $\det M_J \neq 0$ . Consideriamo quindi gli aperti

$$\begin{aligned} U_{IJ} &= \{u \in U_I \mid \det(M_u)_J \neq 0\}, \\ U_{JI} &= \{v \in U_J \mid \det(M_v)_I \neq 0\}. \end{aligned}$$

che risultano essere isomorfi mediante i morfismi

$$\begin{aligned} M_J^{-1} : U_{IJ} &\longrightarrow U_{JI} \\ M_u &\longmapsto (M_u)_J^{-1} \cdot M_u \\ M_I^{-1} : U_{JI} &\longrightarrow U_{IJ} \\ M_v &\longmapsto (M_v)_I^{-1} \cdot M_v \end{aligned}$$

$G(n, r)$  è quindi uno schema, resta da far vedere che può essere immersa in uno spazio proiettivo. Per fare ciò utilizziamo l'*immersione di Plucker*: fissato un ordimento sui multi-indici  $I$  di lunghezza  $n + 1$ , consideriamo

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : G(n, r) &\longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{r+1}{n+1}-1} \\ \Lambda &\longmapsto [\dots : \det M_I : \dots] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Costruiamo ora un fascio coerente localmente libero di rango  $n + 1$  associato alla grassmanniana  $G(n, r)$ . Dato uno spazio lineare qualsiasi  $\Lambda$  di dimensione  $n$  e scelto un multi-indice  $I$ , cioè un aperto affine  $U_I$ , possiamo interpretare la matrice  $M(\Lambda)$  come un morfismo di  $k[\dots, u_{jh}, \dots]$ -moduli liberi

$$k[\dots, u_{jh}, \dots]^{r+1} \xrightarrow{M(\Lambda)} k[\dots, u_{jh}, \dots]^{n+1}$$

che induce un morfismo di  $\mathcal{O}_{U_I}$ -moduli

$$\mathcal{O}_{U_I}^{r+1} \xrightarrow{\mu_I} \mathcal{O}_{U_I}^{n+1}.$$

Possiamo ripetere questa costruzione per ogni altro aperto affine in cui è possibile immergere il punto della grassmanniana individuato da  $\Lambda$  ed inoltre, per ogni coppia di multi-indici  $I, J$ , i morfismi  $\mu_I$  e  $\mu_J$  sono compatibili sull'intersezione  $U_{IJ} \simeq U_{JI}$  mediante il diagramma

$$\begin{array}{ccc} k[\dots, u_{jh}, \dots]^{r+1} & \xrightarrow{M(\Lambda, I)} & k[\dots, u_{jh}, \dots]^{n+1} \\ M_I^{-1} \uparrow \downarrow M_J^{-1} & & M_I^{-1} \uparrow \downarrow M_J^{-1} \\ k[\dots, v_{il}, \dots]^{r+1} & \xrightarrow{M(\Lambda, J)} & k[\dots, v_{il}, \dots]^{n+1} \end{array}$$

Tutte le  $\mu_I$  si incollano insieme in un morfismo di fasci suriettivo, in quanto tali mappe sono suriettive per costruzione, quindi abbiamo

$$\mathcal{O}_{G(n,r)}^{r+1} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0. \quad (4.19)$$

**Definizione 4.20.** Il fascio coerente associato alla grassmanniana  $G(n, r)$  viene detto *fascio quoziente tautologico* e indicato con  $\mathcal{Q}$ .

*Osservazione 4.21.* L'esistenza di un tale morfismo suriettivo, implica che  $\mathcal{Q}$  sia generato da  $r + 1$  sezioni globali, quindi tale suriezione induce un morfismo suriettivo sulle spighe

$$\mathcal{O}_{G(n,r),\Lambda}^{r+1} \longrightarrow \mathcal{Q}_\Lambda \longrightarrow 0.$$

Interpretando questo come fibrato, è come se in ogni punto ci sia una copia di uno spazio proiettivo lineare di dimensione  $n$ .

*Osservazione 4.22.* Consideriamo ora uno schema qualsiasi  $S$  su  $k$ , con un fascio coerente  $\mathcal{F}$  localmente libero di rango  $n + 1$  e supponiamo che il fascio  $\mathcal{F}$  abbia anche un morfismo suriettivo

$$\mathcal{O}_S^{r+1} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

$\psi$  induce un morfismo suriettivo sulla spiga generica  $\mathcal{F}_s$  e ricordando che  $\mathcal{F}_s \simeq \mathcal{O}_{S,s}^{n+1}$ , abbiamo

$$\mathcal{O}_{S,s}^{r+1} \xrightarrow{\psi_s} \mathcal{O}_{S,s}^{n+1}$$

che può essere rappresentato da una matrice di dimensione  $(n + 1) \times (r + 1)$ . La suriettività di  $\psi_s$  ci assicura che il rango della matrice è  $n + 1$ , quindi tale matrice può essere interpretata come punto della grassmanniana  $G(n, r)$ . Costruisco allora un morfismo  $f : S \rightarrow G(n, r)$  che manda il generico punto  $s$ , nel punto di  $G(n, r)$  corrispondente alla matrice individuata da  $\psi_s$ .

Vale il seguente

**Teorema 4.21.** *Sia fissato uno spazio proiettivo  $\mathbb{P}^r$  e la sua grassmanniana  $G(n, r)$ . Per ogni schema  $S$ , esiste una corrispondenza biunivoca tra i morfismi  $f : S \rightarrow G(n, r)$  e i fasci quoziente di rango  $n + 1$  localmente liberi*

$$\mathcal{O}_S^{r+1} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0, \quad (4.20)$$

data da

$$f \xleftrightarrow{1-1} f^* \mathcal{Q}$$

*Dimostrazione.* [Sern, Ch. 4, Th. 4.3.2]. ■



In altre parole, un morfismo  $f : S \rightarrow G(n, r)$  definisce un fascio localmente libero di rango  $n + 1$  contenuto nel fascio quoziente tautologico  $\mathcal{Q}$  di  $G(n, r)$ . Viceversa per ogni fascio quoziente  $\mathcal{F}$  (4.20) localmente libero di rango  $n + 1$  sullo schema  $S$ , è univocamente determinato un morfismo  $f : S \rightarrow G_N(V)$  tale che  $\mathcal{F} = f^* \mathcal{Q}$ .

Quest'ultimo teorema dà alla grassmanniana una proprietà universale che suggerisce un legame tra  $G(r, n)$  e lo schema di Hilbert che parametrizza le sottovarietà di  $\mathbb{P}^r$  con polinomio di Hilbert  $P(z) = \binom{z+n}{n}$ . Vale infatti il seguente

**Teorema 4.22.**  $G(n, r)$  rappresenta lo schema di Hilbert  $\text{Hilb}_{\binom{z+n}{n}}^r$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la grassmanniana  $G(n, r)$  dei sottospazi lineari di  $\mathbb{P}^r$  di dimensione  $n$  con il fascio quoziente tautologico associato  $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{O}_{G(n,r)}^{r+1} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0.$$

Passando ai fibrati proiettivi abbiamo l'inclusione

$$\mathbb{P}(\mathcal{Q}) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\mathcal{O}_{G(n,r)}^{r+1}\right),$$

in quanto localmente  $\mathbb{P}(\mathcal{Q})$  è isomorfo a  $\mathbb{P}^n \times \Lambda$ ,  $\forall \Lambda$ , e  $\mathbb{P}\left(\mathcal{O}_{G(n,r)}^{r+1}\right)$  è globalmente isomorfo a  $\mathbb{P}^r \times G(n, r)$ . Il morfismo è quello indotto dal morfismo sui fasci: per ogni punto  $(\mathbb{P}^n, \Lambda) \in \mathbb{P}(\mathcal{Q})$  posso considerare la trasposta della matrice  $\psi_\Lambda$  associata a  $\Lambda$  nella grassmanniana e immergere lo spazio  $\mathbb{P}^n$  in  $\mathbb{P}^r$

$$(\mathbb{P}^n, \Lambda) \xrightarrow{({}^t\psi_\Lambda, \text{id})} (\mathbb{P}^r, \Lambda).$$

Considerati i morfismi proiezione  $\pi : \mathbb{P}^r \times G(n, r) \rightarrow G(n, r)$  e  $p : \mathbb{P}(\mathcal{Q}) \rightarrow G(n, r)$ , abbiamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathcal{Q}) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^r \times G(n, r) \\ & \searrow p & \downarrow \pi \\ & & G(n, r). \end{array} \quad (4.21)$$

Per le osservazioni fatte in precedenza, la fibra generica del morfismo  $p$  è una copia di  $\mathbb{P}^n$ , quindi  $p$  è un morfismo piatto in quanto ogni fibra ha polinomio di Hilbert  $\binom{z+n}{n}$ . Osserviamo inoltre che, chiamato  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}(\mathcal{Q})}$  il fascio di ideali corrispondente a  $\mathbb{P}(\mathcal{Q})$ ,  $\mathcal{Q} = p_* \mathcal{I}_{\mathbb{P}(\mathcal{Q})}(1) \subseteq \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G(n,r)}(1) = \mathcal{O}_{G(n,r)}^{r+1}$ . Supponiamo ora di considerare una seconda famiglia

$$\begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & \mathbb{P}^r \times S \\ & \searrow q & \downarrow \rho \\ & & S \end{array}$$

di sottospazi lineari di  $\mathbb{P}^r$  di dimensione  $n$ . Chiamato  $\mathcal{I}_Z$  il fascio di ideali corrispondente a  $Z$ , anche in questo caso abbiamo  $q_*\mathcal{I}_Z(1) \subseteq \rho_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times S}(1) = \mathcal{O}_S^{r+1}$  e quindi un morfismo suriettivo:

$$\mathcal{O}_S^{r+1} \longrightarrow q_*\mathcal{I}_Z(1) \longrightarrow 0.$$

$q_*\mathcal{I}_Z(1)$  è un fascio localmente libero di rango  $n + 1$  su  $S$ , quindi per il Teorema 4.21 è univocamente determinato un morfismo  $\varphi : S \rightarrow G(n, r)$  tale che  $q_*\mathcal{I}_Z(1) = \varphi^*\mathcal{Q} = \varphi^*p_*\mathcal{I}_{\mathbb{P}(\mathcal{Q})}(1)$ . Pertanto  $Z = \mathbb{P}(q_*\mathcal{I}_Z(1))$  risulta essere isomorfo a  $S \times_{G(n, r)} \mathbb{P}(\mathcal{Q})$

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{Q}) \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ S & \xrightarrow{\varphi} & G(n, r) \end{array}$$

Il fatto che ogni famiglia  $Z \xrightarrow{q} S$ , con fibre con polinomio di Hilbert  $\binom{z+n}{n}$ , possa essere ottenuta mediante un'estensione di base da (4.21), dimostra che

$$G(n, r) = \mathcal{Hilb}_{\binom{z+n}{n}}^r. \quad \blacksquare$$

### 4.3.5 Esistenza

**Teorema 4.23** (Esistenza dello schema di Hilbert). *Per ogni schema proiettivo  $\mathbb{P}^r$  e per ogni polinomio  $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$ , lo schema di Hilbert  $\mathcal{Hilb}_{P(z)}^r$  esiste.*

*Dimostrazione.* Consideriamo il polinomio  $P(z)$  e scriviamolo come somma di binomiali secondo la Proposizione 1.17

$$P(z) = \sum_{j=0}^r a_j \binom{z+j}{j}.$$

Ogni sottoschema  $X$  di  $\mathbb{P}^r$  con tale polinomio è definito da un fascio di ideali  $\mathcal{I}_X \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$  con polinomio di Hilbert

$$\binom{z+r}{r} - P(z) = (1 - a_r) \binom{z+r}{r} - a_{r-1} \binom{z+r-1}{r-1} - \dots - a_0.$$

Per il Corollario 4.13, ogni fascio di ideali di questo tipo è  $m$ -regolare, per ogni

$$m \geq m_0 = F_r(-a_0, \dots, -a_{r-1}, 1 - a_r).$$

Per la Proposizione 4.6, abbiamo che  $\forall i \geq 1, \forall m \geq m_0$

$$H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}_X(m)) = 0,$$

quindi

$$\dim H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}_X(m)) = \chi(\mathcal{I}_X(m)) = \binom{m+r}{r} - P(m).$$

Fissiamo ora

$$\begin{aligned} N &= \binom{m_0+r}{r} - P(m_0), \\ V &= H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m_0)), \\ d &= \dim V = \binom{m_0+r}{r}. \end{aligned}$$

Chiamiamo  $G$  la grassmanniana  $G_N(V)$  composta dagli sottospazi di  $V$  di dimensione  $N$ ; inoltre sia  $\mathcal{Q}$  il fascio quoziente tautologico

$$\mathcal{O}_G^d \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0, \quad (4.22)$$

localmente libero di rango  $N$ .

Consideriamo ora la proiezione sul secondo fattore  $p : \mathbb{P}^r \times G \rightarrow G$ . Ricordando dal Teorema 4.22 che  $\mathbb{P}^r \times G = \mathbb{P}(\mathcal{O}_G^{r+1})$ , possiamo identificare  $\mathcal{O}_G^d$  con  $p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(m_0))$ , infatti dalla Proposizione 3.14

$$p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(m_0)) \simeq S^{m_0}(\mathcal{O}_G^{r+1})$$

e per l'Osservazione 3.23 è libero di rango  $\binom{m_0+r}{r}$ .

Abbiamo quindi un morfismo

$$p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(m_0)) \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0.$$

Applicando  $p^*$ , possiamo costruire la seguente composizione di morfismi

$$p^*\mathcal{Q} \longrightarrow p^*p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(m_0)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(m_0),$$

che tensorizzata per  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(-m_0)$

$$p^*\mathcal{Q}(-m_0) \longrightarrow p^*p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(m_0)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(-m_0) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}.$$

L'immagine della composizione definisce un fascio di ideali  $\mathcal{I}$  di  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}$ . Chiamiamo  $Z$  il sottoschema chiuso di  $\mathbb{P}^r \times G$  definito da  $\mathcal{I}$  e  $q$  la restrizione di  $p$  al sottoschema  $Z$ .  $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}/\mathcal{I}$  è il fascio strutturale di  $Z$  che consideriamo esteso a 0 fuori da  $Z$ . Localmente, su un aperto  $U$ , abbiamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow p^*\mathcal{Q}(U) \longrightarrow p^*\mathcal{O}_G^d(U) \longrightarrow \mathcal{I}(m_0)(U) \longrightarrow 0$$

che, ricordando il rango locale dei fasci, possiamo riscrivere come

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}^N(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}^d(U) \longrightarrow \mathcal{I}(m_0)(U) \longrightarrow 0$$

da cui deduciamo che localmente  $\mathcal{S}(m_0)$  è libero di rango  $d - N = P(m_0)$ .

Consideriamo ora la flattening stratification indotta da  $p_*\mathcal{O}_Z$  su  $G$

$$\coprod_{e \geq 0} G_e \longrightarrow G.$$

Per ogni strato  $G_j$ , l'inclusione  $i : G_j \rightarrow G$  fattorizza in modo banale su  $\coprod G_e$ , pertanto il fascio  $(1 \times i)^*\mathcal{O}_Z$  è piatto su  $G_j$ . Inoltre trattandosi di strati a due a due disgiunti  $(1 \times i)^*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{G_j}$ , quindi il morfismo proiezione  $q$  ristretto a  $G_j$  è piatto. Da questa osservazione e dal Teorema 4.4, si vede che il numero di polinomi di Hilbert possibili sulla stratificazione  $\coprod G_e$  è finito.

Sia  $H$  lo strato di  $\coprod G_e$  corrispondente al polinomio di Hilbert  $P(z)$ . Il morfismo di inclusione  $i : H \rightarrow G$  fattorizza su  $\coprod G$ , pertanto  $(1 \times i)^*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_H$  è piatto su  $H$ .  $\mathcal{O}_Z$  vale zero fuori da  $Z$ , quindi ci limitiamo alla parte di  $H$  appartenente a  $Z$ , con il prodotto fibrato

$$\begin{array}{ccc} H \times_G Z & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow q \\ H & \xrightarrow{i} & G. \end{array}$$

Posto  $W = H \times_G Z$ , abbiamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} W & \hookrightarrow & \mathbb{P}^r \times H \\ & \searrow \varphi & \downarrow \\ & & H \end{array}$$

che definisce una famiglia di sottoschemi di  $\mathbb{P}^r$  con polinomio di Hilbert  $P(z)$ , in quanto il morfismo  $\varphi$  è piatto. Si può dimostrare che  $W \xrightarrow{\varphi} H$  è proprio la famiglia universale, cioè

$$H = \mathcal{H}ilb_{P(z)}^r.$$

Questa parte di dimostrazione richiede strumenti funtoriali, di cui non abbiamo parlato in questo lavoro, pertanto la si rimanda a [Sern, Ch. 4, Th. 4.3.4]. ■

*Osservazione 4.23.* Il punto generico  $\Lambda$  di  $Z$  è una coppia  $(X_\lambda, \lambda) \in \mathbb{P}^r \times G$ .  $X_\lambda$  è definito da un ideale omogeneo che in grado  $m_0$  è generato da  $\binom{m_0+r}{r} - P(m_0)$  polinomi. Il punto  $\lambda$  di  $G$  corrispondente a  $X_\lambda$  è identificabile interpretando ogni sequenza di coefficienti di questi polinomi come coordinate di un punto di uno spazio vettoriale di dimensione  $\binom{m_0+r}{r}$ : infatti  $\binom{m_0+r}{r} - P(m_0)$  punti (in posizione generale) fissano proprio un punto di  $G$  ( $\binom{m_0+r}{r} - P(m_0), \binom{m_0+r}{r}$ ).

*Osservazione 4.24.* Se l'ideale di un sottoschema  $X \subseteq \mathbb{P}^r$  ha  $\binom{m_0+r}{r} - P(m_0)$  generatori in grado  $m_0$  ovviamente il polinomio di Hilbert di  $X$  non è obbligatoriamente  $P(z)$ . La funzione di Hilbert di  $Z$  potrebbe non essere ancora

polinomiale oppure potrebbe non coincidere con  $P(z)$  per gradi più alti. La flattening stratification consente di scegliere la parte di  $G$  con il polinomio di Hilbert cercato.

*Osservazione 4.25.* Se il polinomio  $P(z)$  è ammissibile, esiste almeno un sottoschema  $X$  di  $\mathbb{P}^r$  con tale polinomio, che quindi ha un ideale con  $\binom{m_0+r}{r} - P(m_0)$  generatori in grado  $m_0$ .  $X$  definisce un punto di  $G$ ; pertanto  $P(z)$  è uno dei polinomi possibili della stratificazione.

*La vérité, c'est que dans les motivation "du scientifique", qui parfois le poussent à investir sans compter dans son travail, l'ambition et la vanité jouent un rôle aussi important et quasiment universel, que dans toute autre profession.*

Alexandre GROTHENDIECK **[R&S]**

## Capitolo 5

# Stratificazione dello schema di Hilbert

Il risultato che sta alla base di queste nuove idee per la caratterizzazione dello schema di Hilbert è il seguente teorema di Macaulay [Mac].

**Teorema 5.1.** *Sia  $S = k[X_0, \dots, X_n]$ . Per ogni ideale omogeneo  $\mathfrak{i} \subseteq S$ ,  $\mathfrak{i}$  e  $\text{In}(\mathfrak{i})$  hanno la stessa funzione di Hilbert.*

*Dimostrazione.* Fissato il grado  $d$  e una base  $\mathcal{B}_d = \{X^{\gamma_1}, \dots, X^{\gamma_r}\}$  (che supponiamo ordinata secondo il term order fissato) dello spazio vettoriale su  $k$   $\text{In}(\mathfrak{i})_d$ , scegliamo  $r$  elementi in  $\mathfrak{i}$ ,  $\{f_1, \dots, f_r\}$  tali che

$$\forall i = 1, \dots, r, \quad \text{LT}(f_i) = X^{\gamma_i}.$$

Vogliamo dimostrare che  $\{f_1, \dots, f_r\}$  è una base di  $\mathfrak{i}_d$ . Per prima cosa è facile vedere che si tratta di elementi linearmente indipendenti, infatti

$$c_1 f_1 + \dots + c_r f_r = 0 \implies \text{LT}(c_1 f_1 + \dots + c_r f_r) = 0,$$

ma avendo ordinato la base  $\mathcal{B}_d$  secondo il term order abbiamo che il leading term è  $c_1 X^{\gamma_1}$ , cioè  $c_1 = 0$ ; a questo punto si ripete il ragionamento sulla combinazione lineare

$$c_2 f_2 + \dots + c_r f_r = 0,$$

e si prosegue fino ad ottenere  $c_1 = \dots = c_r = 0$ .

Supponiamo che  $\{f_1, \dots, f_r\}$  non generi  $\mathfrak{i}_d$ , scegliamo quindi  $g \in \mathfrak{i}_d$  tra gli elementi che non sono combinazione lineare degli  $f_j$  con minimo leading monomial  $X^{\gamma_k}$ . Chiamato  $a$  il coefficiente di  $X^{\gamma_k}$  in  $g$ , costruiamo il polinomio

$$g - c f_k$$

che non si può scrivere come combinazione lineare degli  $f_j$  ed ha leading term più piccolo di  $g$  contro l'ipotesi di minimalità. Pertanto

$$HF_{\text{In}(i)}(d) = \dim \text{In}(i)_d = |\mathcal{B}_d| = \dim i_d = HF_i(d), \quad \forall d. \quad \blacksquare$$

## 5.1 Strumenti

### 5.1.1 Ideale iniziale generico

**Definizione 5.1.** Sia  $S = k[X_0, \dots, X_n]$  l'anello dei polinomi e sia  $\text{GL}(n+1)$  l'insieme delle matrici invertibili  $n \times n$ . Fissato l'elemento  $g = (g_{ij}) \in \text{GL}(n+1)$ , consideriamo l'azione su  $S$  data dal cambiamento di coordinate

$$X_i \mapsto \sum_{j=0}^n g_{ij} x_j. \quad (5.1)$$

Per ogni  $f \in S$  definiamo

$$g \cdot f = f\left(\dots, \sum g_{ij} x_j, \dots\right),$$

e per ogni ideale  $i$

$$g(i) = \{g \cdot f \mid f \in i\}.$$

**Definizione 5.2.** Considerato il gruppo di matrici  $\text{GL}(n+1)$ , definiamo *sottogruppo di Borel* e indichiamo con  $B$ , il sottogruppo delle matrici triangolari inferiori

$$B = \{(g_{ij} \in \text{GL}(n+1) \mid g_{ij} = 0, \forall i > j)\}, \quad (5.2)$$

mentre indichiamo con  $T$  il sottogruppo delle matrici triangolari superiori

$$T = \{(g_{ij} \in \text{GL}(n+1) \mid g_{ij} = 0, \forall i < j)\}. \quad (5.3)$$

**Lemma 5.2.** Per ogni elemento  $g \in T$  e per ogni polinomio  $f \in S$ ,

$$\text{LM}(g \cdot f) = \text{LM}(f).$$

*Dimostrazione.* È sufficiente dimostrarlo su un monomio, quindi consideriamo  $X^\gamma = X_0^{\gamma_0} \dots X_n^{\gamma_n}$  e l'elemento  $(g_{ij}) \in T \subset \text{GL}(n+1)$  che induce il cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{00} & \cdots & g_{0n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{00}x_0 + \cdots + g_{0n}x_n \\ g_{11}x_1 + \cdots + g_{1n}x_n \\ \vdots \\ g_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$



Applicando la sostituzione, otteniamo

$$g \cdot X^\gamma = (g_{00}x_0 + \dots + g_{0n}x_n)^{\gamma_0} (g_{11}x_1 + \dots + g_{1n}x_n)^{\gamma_1} \dots (g_{nn}x_n)^{\gamma_n}$$

e ricordando che il leading monomial di un prodotto è uguale al prodotto dei leading monomial si trova

$$\text{LM}(g \cdot f) = x_0^{\gamma_0} x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}. \quad \blacksquare$$

**Definizione 5.3.** Si dice *mossa elementare*  $\mathbf{e}_k$ , per  $1 \leq k < n$ , la trasformazione su un monomio qualsiasi  $X^\gamma$  definita da

$$\mathbf{e}_k(X^\gamma) = \mathbf{e}_k(X_0^{\gamma_0} \dots X_n^{\gamma_n}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \gamma_{k+1} = 0, \\ X^{\gamma'} = X_0^{\gamma_0} \dots X_k^{\gamma_k+1} X_{k+1}^{\gamma_{k+1}-1} \dots X_n^{\gamma_n}. \end{cases} \quad (5.4)$$

**Proposizione-Definizione 5.3.** Sia  $\mathfrak{i} \subseteq S$  un ideale monomiale. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $X^\gamma \in \mathfrak{i} \Rightarrow \forall k, \mathbf{e}_k(X^\gamma) \in \mathfrak{i}$ ;
2.  $g(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}, \forall g \in B$ ;
3.  $\text{In}(g(\mathfrak{i})) = \mathfrak{i}, \forall g \in U \subseteq B$  intorno aperto di  $I_{n+1}$ .

Un ideale  $\mathfrak{i}$  per cui vale una di queste condizioni viene detto *Borel-fixed*.

*Dimostrazione.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Chiamata  $M_{i,j}$  la matrice formata da tutti elementi nulli tranne l'elemento di posizione  $i, j$  che vale 1, le matrici  $\lambda I_{n+1} + \mu M_{k+1,k}$  per  $0 \leq k < n$  generano il sottogruppo  $B$ . Vediamo come opera una tale matrice  $g$  su un monomio  $X^\gamma$  di  $\mathfrak{i}$ : dobbiamo effettuare il cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = (\lambda I_{n+1} + \mu M_{k+1,k}) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \vdots \\ \lambda x_k \\ \mu x_k + \lambda x_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{aligned} g \cdot X^\gamma &= (\lambda x_0)^{\gamma_0} \dots (\lambda x_k)^{\gamma_k} (\mu x_k + \lambda x_{k+1})^{\gamma_{k+1}} \dots (\lambda x_n)^{\gamma_n} = \\ &= \sum_{j=0}^{\gamma_{k+1}} \binom{\gamma_{k+1}}{j} \lambda^{\gamma_0 + \dots + j + \dots + \gamma_n} \mu^{\gamma_{k+1} - j} (x_0^{\gamma_0} \dots x_k^{\gamma_k + j} x_k^{\gamma_{k+1} - j} \dots x_n^{\gamma_n}) = \\ &= \sum_{j=0}^{\gamma_{k+1}} \binom{\gamma_{k+1}}{j} \lambda^{\gamma_0 + \dots + j + \dots + \gamma_n} \mu^{\gamma_{k+1} - j} \cdot \mathbf{e}_k^j(x^\gamma). \end{aligned}$$

Per 1.,  $\mathbf{e}_k(x^\gamma) \in \mathfrak{i}$ , quindi per ogni  $g \in B$ ,  $g \cdot x^\gamma$  appartiene ad  $\mathfrak{i}$ .

(2.  $\Rightarrow$  1.) Viceversa consideriamo la matrice  $g = I_{n+1} + M_{k+1,k} \in B$  che agisce sulle coordinate con la sostituzione

$$(X_0, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n) = (x_0, \dots, x_k, x_k + x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Per 2., per ogni monomio  $X^\gamma \in \mathfrak{i}$ ,  $g \cdot X^\gamma$  appartiene ancora all'ideale e

$$g \cdot X^\gamma = \sum_{j=0}^{\gamma_{k+1}} \binom{\gamma_{k+1}}{j} \mathbf{e}_k^j(x^\gamma)$$

quindi  $\mathbf{e}_k(x^\gamma)$  deve appartenere ad  $\mathfrak{i}$ , per ogni  $0 \leq k < n$ .

(2.  $\Rightarrow$  3.) Per ogni matrice  $g \in B$ ,  $g(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}$ , quindi  $\text{In}(g(\mathfrak{i})) = \text{In}(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}$ .

(3.  $\Rightarrow$  2.) Per dimostrare che  $g(\mathfrak{i})$  coincide con  $\mathfrak{i}$ , facciamo vedere che  $g(\mathfrak{i})$  è un ideale monomiale quindi coincidente con il suo ideale iniziale. Consideriamo nuovamente una generica matrice  $g = I_{n+1} + M_{k+1,k}$  e l'azione sul generico monomio  $X^\gamma \in \mathfrak{i}$

$$g \cdot X^\gamma = \sum_{j=0}^{\gamma_{k+1}} \binom{\gamma_{k+1}}{j} \mathbf{e}_k^j(x^\gamma).$$

Ordinando i monomi secondo il term order fissato troviamo

$$g \cdot X^\gamma = \mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}}(x^\gamma) + \gamma_{k+1} \cdot \mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}-1}(x^\gamma) + \dots + \mathbf{e}_k^0(x^\gamma),$$

quindi il leading term di  $g \cdot X^\gamma$  è  $\mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}}(x^\gamma)$ , che per ipotesi appartiene ad  $\mathfrak{i}$ . Inoltre applicare  $\mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}}$  a  $x^\gamma$  significa eliminare la variabile  $x_{k+1}$  dal monomio, quindi

$$g \cdot (\mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}}(x^\gamma)) = \sum_{j=0}^0 \binom{\gamma_{k+1}}{j} \mathbf{e}_k^j(\mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}}(x^\gamma)) = \mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}}(x^\gamma) \in g(\mathfrak{i}).$$

Affinché  $g(\mathfrak{i})$  sia monomiale tutti i monomi di  $g \cdot X^\gamma$  devono appartenere all'ideale. Procediamo quindi induttivamente su  $j$ . Per prima cosa  $x^\gamma - \mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}}(x^\gamma)$ , quindi applicando  $g$ , si ottiene

$$g \cdot (x^\gamma - \mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}}(x^\gamma)) = \gamma_{k+1} \cdot \mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}-1}(x^\gamma) + \dots + \mathbf{e}_k^0(x^\gamma),$$

quindi per  $j = \gamma_{k+1} - 1$ , il monomio  $\mathbf{e}_k^j(x^\gamma)$  sta in  $\mathfrak{i}$  per ipotesi. Applicando  $g$  a questo monomio si ottiene

$$\begin{aligned} g \cdot (\mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}-1}(x^\gamma)) &= \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} \mathbf{e}_k^j(\mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}-1}(x^\gamma)) = \\ &= \mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}}(x^\gamma) + \mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}-1}(x^\gamma), \end{aligned}$$

cioè

$$\mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}-1}(x^\gamma) = g \cdot (\mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}-1}(x^\gamma)) - \mathbf{e}_k^{\gamma_{k+1}}(x^\gamma) \in g(\mathfrak{i}).$$

Ripetendo il procedimento su  $j$  decrescenti, si vede che, per  $j$  qualsiasi,  $\mathbf{e}_k^j(x^\gamma)$  appartiene a  $\mathfrak{i} \cap g(\mathfrak{i})$  e quindi in particolare a  $g(\mathfrak{i})$ . ■

---

**Proposizione-Definizione 5.4.** Fissato un monomial order, per ogni ideale omogeneo  $i \subseteq S$ , esiste un aperto di Zariski  $U$  di  $\text{GL}(n+1)$  tale che  $\text{In}(g(i))$  è costante e Borel-fixed per ogni  $g \in U$ . Tale ideale monomiale viene detto ideale iniziale generico di  $i$  e viene indicato con  $\text{gin}(i)$ .

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione si veda [Green, Th. 1.27]. ■

### 5.1.2 Regolarità e saturazione

**Definizione 5.4.** Siano  $i$  e  $j$  due ideali omogenei di  $S$ , si definisce *ideale diviso* di  $i$  rispetto a  $j$  l'ideale

$$(i : j) = \{p \in S \mid pq \in i, \forall q \in j\}. \quad (5.5)$$

**Definizione 5.5.** Denotato con  $\mathfrak{m}$  l'ideale irrilevante di  $S$ , un ideale omogeneo  $i$  si dice *saturato* se

$$(i : \mathfrak{m}) = i. \quad (5.6)$$

Dato un ideale omogeneo qualsiasi  $i$  è facile costruire la sua saturazione mediante l'unione

$$i^{\text{sat}} = \bigcup_{k \geq 0} (i : \mathfrak{m}^k) = i \cup (i : \mathfrak{m}) \cup \dots \cup (i : \mathfrak{m}^k) \cup \dots,$$

infatti

$$(i^{\text{sat}} : \mathfrak{m}) = (i : \mathfrak{m}) \cup \dots \cup (i : \mathfrak{m}^k) \cup \dots = \bigcup_{k \geq 1} (i : \mathfrak{m}^k)$$

ed inoltre  $(i : \mathfrak{m}^k) \subseteq (i : \mathfrak{m}^{k+1})$ , quindi  $i^{\text{sat}} = (i^{\text{sat}} : \mathfrak{m})$ .

**Definizione 5.6.** Un ideale  $i$  si dice *m-saturato* se per ogni  $d \geq m$

$$i_d = i_d^{\text{sat}}.$$

Il più piccolo intero  $m$  per cui  $i$  è  $m$ -saturato rappresenta la *sazietà* dell'ideale.

**Definizione 5.7.** Sia  $i$  un ideale omogeneo e sia

$$0 \longrightarrow \bigoplus_j S(-a_{\lambda,j}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigoplus_j S(-a_{1,j}) \longrightarrow \bigoplus_j S(-a_{0,j}) \longrightarrow i \longrightarrow 0$$

una sua risoluzione libera graduata. Si dice che  $i$  è *m-regolare* se

$$m \geq a_{k,j} - k, \quad \forall 0 \leq k \leq \lambda, \forall j. \quad (5.7)$$

Il minimo  $m$  per cui  $i$  è  $m$ -regolare, viene detto *regolarità* dell'ideale e indicato con  $\text{reg}(i)$ .

È immediato calcolare la regolarità di un ideale a partire da una sua risoluzione, infatti il minimo intero per cui vale (5.7) è

$$\max_{k,j} \{a_{k,j} - k\}$$

*Osservazione 5.8.* La regolarità offre anche un limite inferiore oltre il quale la funzione di Hilbert diventa sicuramente polinomiale, infatti costruendo il polinomio di Hilbert a partire dalla risoluzione si ha

$$\begin{aligned} HF_i(d) &= \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k \left( \sum_j HF_{S(-a_{k,j})}(d) \right) = \sum_{k,j} (-1)^k \binom{d - a_{k,j} + n}{n} = \\ &= \sum_{k,j} (-1)^k \frac{(d - a_{k,j} + n)(d - a_{k,j} + n - 1) \cdots (d - a_{k,j} + 1)}{n!} . \end{aligned}$$

Ogni binomiale è polinomiale per  $d - a_{k,j} + n \geq 0 \Rightarrow d \geq a_{k,j} - n$ . Per  $d > \text{reg}(i)$ , abbiamo che  $d > \max \{a_{k,j} - k\} > a_{k,j} - k$ , per ogni  $k$  e per ogni  $j$ ; inoltre per il Teorema delle Sizigie di Hilbert (1.14),  $k \leq n + 1$ , quindi

$$d > a_{k,j} - k \geq a_{k,j} - n - 1 \implies d \geq a_{k,j} - n, \forall k, \forall j.$$

La regolarità di un ideale introdotta ora è legata alla regolarità sui fasci introdotta nel capitolo precedente. Vale infatti la seguente

**Proposizione 5.5.** *Un ideale omogeneo  $i$  è  $m$ -regolare se e solo se  $i$  è  $m$ -saturato e il fascio associato  $\tilde{i}$  è  $m$ -regolare. Per un qualsiasi ideale omogeneo  $i$  saturato, la regolarità dell'ideale è uguale alla regolarità del fascio  $\tilde{i}$ .*

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione si veda [Green, Prop. 2.6]. ■

**Proposizione 5.6.** *Sia  $i$  un ideale monomiale Borel-fixed, allora*

$$(i : \mathfrak{m}) = (i : X_n).$$

*Dimostrazione.*  $\mathfrak{m} = (X_0, \dots, X_n)$ , quindi  $(i : \mathfrak{m}) \subseteq (i : X_n)$ . Consideriamo ora un elemento  $f \in (i : X_n)$ , cioè  $X_n f \in i$ . Applichiamo ad ogni monomio di  $X_n f$  la mossa elementare  $\mathbf{e}_{n-1}$ , ottenendo

$$\mathbf{e}_{n-1}(X_n f) = X_{n-1} f$$

che appartiene ad  $i$ , perché l'ideale è Borel-fixed. Applicando mosse elementari di indice decrescente, si ricava

$$X_0 f, X_1 f, \dots, X_n f \in i,$$

cioè  $f \in (i : \mathfrak{m})$ , quindi  $(i : X_n) \subseteq (i : \mathfrak{m})$ . ■

**Corollario 5.7.** *Un ideale monomiale omogeneo  $\mathfrak{i}$  Borel-fixed è saturato se  $X_n$  non compare in alcun generatore dell'ideale.*

Enunciamo ora alcuni risultati dimostrati in [Green].

**Proposizione 5.8.** *La regolarità di un ideale monomiale  $\mathfrak{i}$  Borel-fixed è pari al massimo grado di un suo generatore.*

**Corollario 5.9.** *Fissato un term order qualsiasi, dato un ideale omogeneo  $\mathfrak{i}$ ,  $\text{reg}(\mathfrak{i}) \leq \text{reg}(\text{In}(\mathfrak{i}))$ . In particolare  $\text{reg}(\mathfrak{i}) \leq \text{reg}(\text{gin}(\mathfrak{i}))$ , cioè la regolarità di  $\mathfrak{i}$  è limitata dal massimo grado di un generatore del generico ideale iniziale.*

**Proposizione 5.10.** *Fissato il term order RevLex, per ogni ideale omogeneo  $\mathfrak{i}$ :*

1.  $\text{reg}(\mathfrak{i})$  è pari al grado del generatore più grande di  $\text{gin}(\mathfrak{i})$ ;
2.  $\text{gin}(\mathfrak{i}^{\text{sat}}) = \bigcup_{k \geq 0} (\text{gin}(\mathfrak{i}) : X_n^k)$ ;
3.  $\mathfrak{i}$  è saturato se e solo se nessun generatore di  $\text{gin}(\mathfrak{i})$  contiene la variabile  $X_n$ .

## 5.2 Strati

**Definizione 5.9.** Fissato un term order  $\succ$ , dato un ideale monomiale  $\mathfrak{i}_0$  dell'anello  $k[X_0, \dots, X_r]$  si definisce *strato* l'insieme

$$H_{\mathfrak{i}_0} = \{ \mathfrak{i} \subseteq k[X_0, \dots, X_r] \text{ omogeneo} \mid \text{In}_{\succ}(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}_0 \}.$$

Utilizzando le basi di Gröbner, è possibile dare una struttura di schema affine allo strato  $H_{\mathfrak{i}_0}$ . Cominciamo con l'introdurre la seguente

**Definizione 5.10.** Sia  $\mathfrak{i} \subseteq k[X_0, \dots, X_r]$  un ideale monomiale e sia  $\mathcal{B} = \{X^{\gamma_1}, \dots, X^{\gamma_n}\}$  una sua base. Fissato un term order  $\succ$ , si definisce *coda* di un elemento  $X^{\gamma_i}$  rispetto all'ideale  $\mathfrak{i}$  l'insieme

$$T_{\gamma_i}^{\mathfrak{i}} = \{ X^{\alpha} \in k[X_0, \dots, X_r] \setminus \mathfrak{i} \mid |\alpha| = |\gamma_i| \text{ e } X^{\gamma_i} \succ X^{\alpha} \} \quad (5.8)$$

**Proposizione 5.11.** *Sia  $\mathcal{B} = \{X^{\gamma_1}, \dots, X^{\gamma_n}\}$  una base per l'ideale monomiale  $\mathfrak{i}$  di  $k[X_1, \dots, X_r]$ . Fissato un term order  $\succ$ , lo strato  $H_{\mathfrak{i}}$  è un sottoschema chiuso dello schema affine  $\mathbb{A}^N$ , dove*

$$N = \sum_{j=1}^n |T_{\gamma_j}^{\mathfrak{i}}|.$$

*Dimostrazione.* Ogni ideale  $\mathfrak{j}$  con ideale iniziale  $\text{In}(\mathfrak{j}) = \mathfrak{i}$  ha un'unica base di Gröbner ridotta del tipo

$$\begin{aligned} F_1 &= X^{\gamma_1} + \sum_{X^\alpha \in T_{\gamma_1}^i} c_{1\alpha} X^\alpha, \\ F_2 &= X^{\gamma_2} + \sum_{X^\alpha \in T_{\gamma_2}^i} c_{2\alpha} X^\alpha, \\ &\vdots \\ F_n &= X^{\gamma_n} + \sum_{X^\alpha \in T_{\gamma_n}^i} c_{n\alpha} X^\alpha. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Interpretiamo ora i parametri  $c_{i\alpha}$  come variabili e conseguentemente  $F_1, \dots, F_n$  come polinomi nell'anello  $k[X_0, \dots, X_r; \dots, c_{i\alpha}, \dots]$ , dove le variabili  $c_{i\alpha}$  sono in numero pari a  $N = \sum_{j=1}^n |T_{\gamma_j}^i|$ . Affinché l'insieme  $\mathcal{B} = \{F_1, \dots, F_n\}$  sia una base di Gröbner, i valori dei parametri  $c_{i\alpha}$  devono essere tali per cui la riduzione di qualsiasi  $S$ -polinomio  $S(F_j, F_l)$  sull'insieme  $\mathcal{B}$  deve dare 0 come risultato. Quindi non tutte le scelte possibili dei coefficienti  $c_{i\alpha}$  sono ammissibili; il sottoschema di  $\mathbb{A}^N = \text{Spec } k[\dots, c_{i\alpha}, \dots]$  corrispondente alle scelte ammissibili dà la struttura di schema affine allo strato  $H_i$ .

Calcolando la riduzione su  $\mathcal{B}$  degli  $S$ -polinomi troveremo per ogni coppia di indici  $1 \leq l < j \leq n$  un polinomio resto

$$S(F_j, F_l) \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ \sum_{\beta} G_{\beta}^{jl} X^{\beta},$$

dove i coefficienti  $G_{\beta}^{jl}$  del polinomio, nelle variabili  $X_0, \dots, X_r$ , sono dei polinomi nelle variabili  $c_{i\alpha}$ . Imponiamo che questi coefficienti siano nulli considerando l'ideale di  $k[\dots, c_{i\alpha}, \dots]$

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{j,l,\beta} \langle G_{jl}^{\beta} \rangle$$

ed infine

$$H_i \simeq \text{Spec } k[\dots, c_{i\alpha}, \dots] / \mathfrak{h}. \quad \blacksquare$$

*Osservazione 5.11.* Il sottoschema chiuso corrispondente allo strato  $H_i$  è sempre non vuoto, infatti contiene il punto  $(0, \dots, 0)$  che definisce l'ideale monomiale  $\mathfrak{i}$  di partenza.

*Osservazione 5.12.* La riduzione degli  $S$ -polinomi commuta con la scelta dei parametri, in quanto tale processo è determinato da valutazioni sui leading terms dei polinomi  $F_1, \dots, F_n$  che non coinvolgono i coefficienti  $c_{i\alpha}$ . Da un punto di vista pratico, significa che dopo la prima riduzione viene determinato un ideale  $\mathfrak{h}_1$  che fornisce restrizioni sui parametri, quindi nel proseguo è possibile considerare coefficienti non più in  $\mathbb{A}^N$  ma in  $\text{Spec } k[\dots, c_{i\alpha}, \dots] / \mathfrak{h}_1$ . Da un punto

di vista strettamente algebrico significa, dati due ideali qualsiasi  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  dell'anello  $k[x_0, \dots, x_n]$ , utilizzare l'isomorfismo

$$\frac{k[x_0, \dots, x_n]/\mathfrak{a}}{\bar{\mathfrak{b}}} \simeq \frac{k[x_0, \dots, x_n]}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}},$$

dove  $\bar{\mathfrak{b}}$  è l'immagine di  $\mathfrak{b}$  nel quoziente  $k[x_0, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$ .

**Esempio 5.13.** Consideriamo l'ordinamento RevLex su  $k[X_0, X_1, X_2]$  e l'ideale monomiale

$$\mathfrak{i} = (X_0^2, X_0X_2).$$

Le code dei due monomi sono:

$$\begin{aligned} T_{2,0,0}^{\mathfrak{i}} &= \{X^\alpha \text{ t.c. } |\alpha| = 2 \text{ e } X_0^2 \succ_{\text{RevLex}} X^\alpha\} = \{X_0X_1, X_1^2, X_1X_2, X_2^2\}, \\ T_{1,0,1}^{\mathfrak{i}} &= \{X^\alpha \text{ t.c. } |\alpha| = 2 \text{ e } X_0X_2 \succ_{\text{RevLex}} X^\alpha\} = \{X_1X_2, X_2^2\} \end{aligned}$$

Un ideale omogeneo  $\mathfrak{j}$  con ideale iniziale  $\mathfrak{i}$  deve quindi avere una base di Gröbner ridotta formata da due polinomi omogenei con leading terms  $X_0^2$  e  $X_0X_2$ . La generica coppia di tali elementi è

$$\begin{aligned} F_1 &= X_0^2 + c_1X_0X_1 + c_2X_1^2 + c_3X_1X_2 + c_4X_2^2 \\ F_2 &= X_0X_2 + c_5X_1X_2 + c_6X_2^2. \end{aligned}$$

Interpretando  $F_1$  e  $F_2$  come polinomi in  $k[c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6]$ , parametrizzo le coppie con lo schema  $\mathbb{A}^6$ . Affinché  $\mathcal{G} = \{F_1, F_2\}$  sia una base di Gröbner, impongo che la riduzione di  $S(F_1, F_2)$  su  $\mathcal{G}$  dia il polinomio nullo:

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{\mathcal{G}}_+ (c_2 - c_1c_5 + c_5^2)X_1^2X_2 + (c_3 - c_1c_6 + 2c_5c_6)X_1X_2^2 + (c_4 + c_6^2)X_2^3.$$

Tutti i possibili ideali omogenei appartenenti allo strato  $H_i$  sono quindi parametrizzati dallo schema affine

$$\text{Spec } k[c_1, \dots, c_6]/\mathfrak{h}$$

dove

$$\mathfrak{h} = (c_2 - c_1c_5 + c_5^2, c_3 - c_1c_6 + 2c_5c_6, c_4 + c_6^2).$$

Da un punto di vista computazionale, questo approccio presenta delle difficoltà legate al numero di parametri con cui ci si trova a lavorare. Supponiamo di avere un ideale monomiale  $\mathfrak{i} \subseteq k[X_0, \dots, X_r]$  generato da  $N$  elementi  $X^{\gamma_1}, \dots, X^{\gamma_N}$  in grado  $n$ , con  $N < \binom{n+r}{r}$ . Fissato il term order  $\succ$ , supponiamo di trovarci nel caso peggiore, cioè nel caso in cui gli  $N$  generatori siano gli  $N$  monomi più grandi. Sotto queste ipotesi abbiamo che

$$|T_{\gamma_1}^{\mathfrak{i}}| = \dots = |T_{\gamma_N}^{\mathfrak{i}}| = \binom{n+r}{r} - N,$$

quindi dovrei considerare  $N \binom{n+r}{r} - N$  parametri, il che significa che con il RevLex nel caso dell'ideale  $\mathfrak{i} = (X_0^4, X_0^3 X_1, X_0^2 X_1^2, X_0 X_1^3) \subseteq k[X_0, \dots, X_5]$  avremmo

$$4 \left( \binom{4+5}{5} - 4 \right) = 4 \cdot 100 = 400 \text{ parametri.}$$

In realtà è possibile ridurre questo numero: tornando all'Esempio 5.13 si osserva immediatamente che le variabili  $c_2, c_3, c_4$  sono eliminabili, perché compaiono solo in grado 1, e vedremo ora che non si tratta di un caso fortunato ma bensì di un comportamento standard.

**Definizione 5.14.** Sia  $(G, \cdot, \preceq)$  un gruppo totalmente ordinato. Denotato con  $\mathbb{T}_y$  l'insieme dei monomi nelle variabili  $y_1, \dots, y_s$ , si definisce  $G$ -graduazione di  $k[y_1, \dots, y_s]$ , la graduazione indotta da  $G$  sull'anello dei polinomi mediante la mappa moltiplicativa

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{T}_y &\longrightarrow G \\ y_i &\longmapsto g_i \end{aligned} \tag{5.10}$$

tale che

1.  $g_i \succ 1_G, \forall i = 1, \dots, s$ , e quindi  $\lambda(y^\alpha) \succ 1_G$  per ogni monomio  $y^\alpha \in \mathbb{T}_y$ ;
2. dati  $y^\alpha, y^\beta \in \mathbb{T}_y$ , se  $y^\beta$  divide  $y^\alpha$  allora  $\lambda(y^\alpha) \succ \lambda(y^\beta)$ .

*Osservazione 5.15.* Gli elementi  $\lambda(y_1), \dots, \lambda(y_s) \in G$  possono anche non essere tutti distinti.

**Esempio 5.16.** La graduazione solita è una  $\mathbb{Z}$ -graduazione, indotta su  $\mathbb{T}_y$  dalla mappa  $\lambda : \mathbb{T}_y \rightarrow \mathbb{Z}$  che manda ogni variabile  $y_i$  nell'elemento  $1 > 0$ . Il generico monomio  $y^\alpha$  viene mandato nell'intero  $|\alpha|$ , pertanto se  $y^\beta$  divide  $y^\alpha$ ,  $|\beta| \leq |\alpha|$ , quindi  $\lambda(y^\alpha) \geq \lambda(y^\beta)$ .

**Definizione 5.17.** Sia  $(G, \cdot, \geq)$  un gruppo totalmente ordinato e sia  $\lambda : \mathbb{T}_y \rightarrow G$  una mappa moltiplicativa che induce una  $G$ -graduazione su  $k[y_1, \dots, y_s]$ . Un ideale  $\mathfrak{a}$  di  $k[y_1, \dots, y_s]$  omogeneo rispetto alla  $G$ -graduazione viene detto  $G$ -omogeneo o  $\lambda$ -omogeneo.

Dato un ideale  $\mathfrak{a}$  di  $k[y_1, \dots, y_s]$ , indichiamo con  $L(\mathfrak{a})$  lo spazio vettoriale su  $k$  formato dalle forme lineari di  $\mathfrak{a}$ . Si può facilmente costruire una base di  $L(\mathfrak{a})$  formata da  $\dim L(\mathfrak{a})$  forme lineari che sia contemporaneamente una base di Gröbner ridotta secondo il term order scelto.

**Proposizione 5.12.** Supponiamo dati su  $A = k[y_1, \dots, y_s]$  una  $G$ -graduazione e un term order. Sia  $\mathfrak{a}$  un ideale  $\lambda$ -omogeneo, con  $\mathfrak{a} \neq (1)$ . Consideriamo una base di Gröbner ridotta  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$  di  $L(\mathfrak{a})$ , dove  $d = \dim L(\mathfrak{a})$ . Possiamo supporre



che i leading terms di queste  $d$  forme lineari siano le prime  $d$  variabili dell'anello  $A$  (eventualmente operando un cambio di indici) cioè

$$\sigma_1 = y_1 - l_1, \quad \sigma_2 = y_2 - l_2, \quad \dots \quad \sigma_d = y_d - l_d,$$

dove  $l_1, \dots, l_d$  sono forme lineari in  $k[y_{d+1}, \dots, y_s]$ . Allora

$$\mathfrak{a} = (y_1 - l_1 + f_1, \dots, y_d - l_d + f_d, f_{d+1}, \dots, f_n), \quad (5.11)$$

dove  $f_1, \dots, f_n$  sono polinomi in  $k[y_{d+1}, \dots, y_s]$  privi di parte lineare.

*Dimostrazione.* Eventualmente applicando un cambio di indici, possiamo supporre che

$$\lambda(y_1) \leq \lambda(y_2) \leq \dots \leq \lambda(y_d).$$

Per ogni  $i = 1, \dots, d$ , consideriamo un polinomio  $\lambda$ -omogeneo  $y_i - l_i + g_i \in \mathfrak{a}$  con parte lineare  $y_i - l_i$ ; a questi  $d$  polinomi aggiungiamo i polinomi  $\lambda$ -omogenei  $g_{d+1}, \dots, g_n$  in modo da determinare un sistema di generatori di  $\mathfrak{a}$ :

$$\mathfrak{a} = (y_1 - l_1 + g_1, \dots, y_d - l_d + g_d, g_{d+1}, \dots, g_n).$$

Determiniamo i polinomi  $f_1, \dots, f_d$  costruttivamente, procedendo per induzione.  $g_1$  è  $\lambda$ -omogeneo, cioè per ogni monomio  $y^\alpha$  di  $g_1$  abbiamo

$$\lambda(y^\alpha) = \lambda(y_1) \leq \lambda(y_2) \leq \dots \leq \lambda(y_d),$$

da cui si deduce che le variabili  $y_1, \dots, y_d$  non compaiono in  $g_i$ , quindi  $f_1 = g_1$ ; inoltre  $f_1$  è privo di parte lineare. Supponiamo ora che di aver costruito i polinomi  $f_1, \dots, f_t \in k[y_{d+1}, \dots, y_s]$  privi di parte lineare. Al passo  $t + 1$ , applichiamo in  $g_{t+1}$  la sostituzione  $y_i = h_i - f_i, \forall i = 1, \dots, t$ , ottenendo un polinomio  $f_{t+1}$  nel quale non compaiono le prime  $d$  variabili e privo di parte lineare in quanto  $g_{t+1}$  lo era.

Nei restanti polinomi  $g_{d+1}, \dots, g_n$ , sostituiamo  $y_i$  con  $h_i - f_i$ , per ogni  $i = 1, \dots, d$ , eliminando le variabili  $y_1, \dots, y_d$ . Inoltre i polinomi ottenuti  $f_{d+1}, \dots, f_n$  non possono avere parte lineare: infatti in tal caso dovrebbero contenere almeno una delle prime  $d$  variabili, perché una base di  $L(\mathfrak{a})$  le contiene. ■

**Definizione 5.18.** Le variabili  $y_1, \dots, y_d$  vengono dette *variabili eliminabili* dell'ideale  $\lambda$ -omogeneo  $\mathfrak{a}$ .

**Corollario 5.13.** Nelle ipotesi della proposizione precedente, abbiamo l'isomorfismo

$$k[y_{d+1}, \dots, y_s] / \mathfrak{a}_1 \simeq k[y_1, \dots, y_s] / \mathfrak{a}, \quad (5.12)$$

dove  $\mathfrak{a}_1 = k[y_1, \dots, y_s] \cap \mathfrak{a}$ .

*Dimostrazione.* Calcolando il quoziente  $k[y_1, \dots, y_s]/\mathfrak{a}$ , elimino le prime  $d$  variabili quindi mi restringo all'anello  $k[y_{d+1}, \dots, y_s]$ , nel quale devo tener conto delle relazioni tra queste variabili date dai generatori di  $\mathfrak{a}$  che non contengono  $y_1, \dots, y_d$ :

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \cap k[y_{d+1}, \dots, y_s] = (f_{d+1}, \dots, f_n). \quad \blacksquare$$

Torniamo al caso illustrato nella Proposizione 5.11. Fissato il term order  $\preceq$ , sia  $\mathfrak{i} = (X^{\gamma_1}, \dots, X^{\gamma_n})$  un ideale monomiale e sia  $\mathcal{B} = \{F_1, \dots, F_n\}$  l'insieme formato dagli elementi (5.9):

$$\begin{aligned} F_1 &= X^{\gamma_1} + \sum_{X^\alpha \in T_{\gamma_1}^1} c_{1\alpha} X^\alpha, \\ F_2 &= X^{\gamma_2} + \sum_{X^\alpha \in T_{\gamma_2}^1} c_{2\alpha} X^\alpha, \\ &\vdots \\ F_n &= X^{\gamma_n} + \sum_{X^\alpha \in T_{\gamma_n}^1} c_{n\alpha} X^\alpha. \end{aligned}$$

**Proposizione-Definizione 5.14.** Dato il semigruppato  $(\mathbb{T}_X, \cdot)$  composto dai monomi dell'anello  $k[X_0, \dots, X_r]$ , indichiamo con  $(\mathbb{T}_X^*, \cdot)$  il gruppo dei monomi generalizzati a esponente intero

$$\mathbb{T}_X^* = \left\{ \frac{X^\alpha}{X^\beta} \mid X^\alpha, X^\beta \in \mathbb{T}_X \right\}. \quad (5.13)$$

Fissato un term order  $\preceq$  su  $\mathbb{T}_X$ , l'ordinamento indotto su  $\mathbb{T}_X^*$

$$\frac{X^{\alpha_1}}{X^{\beta_1}} \succeq \frac{X^{\alpha_2}}{X^{\beta_2}} \iff X^{\alpha_1} X^{\beta_2} \succeq X^{\alpha_2} X^{\beta_1}$$

rende  $(\mathbb{T}_X^*, \cdot, \preceq)$  è un gruppo totalmente ordinato.

**Proposizione-Definizione 5.15.** Indicato con  $c$  l'insieme dei coefficienti di  $F_1, \dots, F_n$ , definiamo livello la funzione moltiplicativa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{T}_{X,c} &\longrightarrow \mathbb{T}_X^*, \\ X_j &\longmapsto X_j, \\ c_{i\alpha} &\longmapsto \frac{X^{\gamma_i}}{X^\alpha}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

$\mathcal{L}$  induce una  $\mathbb{T}_X^*$ -graduazione sia su  $k[X_0, \dots, X_r; \dots, c_{i\alpha}, \dots]$  che su  $k[\dots, c_{i\alpha}, \dots]$ .

*Dimostrazione.*  $\mathcal{L}(X_j) = X_j \succ 1$ , per ogni variabile  $X_j$ , e  $\mathcal{L}(c_{i\alpha}) \succ 1$  perché  $X^\alpha$  appartiene a  $T_{\gamma_i}^1$ , cioè

$$X^{\gamma_i} \succ X^\alpha \implies \frac{X^{\gamma_i}}{X^\alpha} \succ 1.$$

Inoltre  $\mathcal{L}$  verifica anche la condizione 2., per le proprietà del term order  $\preceq$  su  $\mathbb{T}_X$ . Le due proprietà restano valide se considero la restrizione di  $\mathcal{L}$  ai monomi nelle variabili  $c_{i\alpha}$ . ■

**Lemma 5.16.** *L'ideale  $\mathfrak{h} \subseteq k[\dots, c_{i\alpha}, \dots]$  corrispondente allo strato  $H_i$ , con  $i$  ideale monomiale di  $k[X_0, \dots, X_r]$ , è  $\mathcal{L}$ -omogeneo.*

*Dimostrazione.* Un qualsiasi polinomio  $F_i$  di  $\mathcal{B}$  è  $\mathcal{L}$ -omogeneo, infatti

$$\mathcal{L}(c_{i\alpha} X^\alpha) = \mathcal{L}(c_{i\alpha}) \cdot \mathcal{L}(X^\alpha) = \frac{X^{\gamma_i}}{X^\alpha} X^\alpha = X^{\gamma_i} = \mathcal{L}(X^{\gamma_i}),$$

per ogni  $X^\alpha \in T_{\gamma_i}^i$ . Quindi anche gli S-polinomi e le riduzioni su  $\mathcal{B}$  sono  $\mathcal{L}$ -omogenei. Come fatto in precedenza, scriviamo la riduzione degli S-polinomi come polinomi nelle variabili  $X_0, \dots, X_r$

$$S(F_j, F_l) \xrightarrow{\mathcal{B}}_+ \sum_{\beta} G_{\beta}^{jl} X^{\beta};$$

essendo  $\sum G_{\beta}^{jl} X^{\beta}$   $\mathcal{L}$ -omogeneo, ogni polinomio  $G_{\beta}^{jl}$  deve essere  $\mathcal{L}$ -omogeneo, quindi anche l'ideale  $\mathfrak{h}$  è  $\mathcal{L}$ -omogeneo. ■

**Teorema 5.17.** *Lo strato  $H_i$  corrispondente all'ideale monomiale  $i$  di  $k[X_0, \dots, X_r]$  è uno schema affine oppure il punto corrispondente a  $i$  è un punto singolare.*

*Dimostrazione.* Indicato con  $c$  l'insieme delle variabili  $c_{i\alpha}$ , applichiamo la Proposizione 5.12 per determinare l'insieme di variabili eliminabili  $c_1, \dots, c_d$  dell'ideale  $\mathcal{L}$ -omogeneo  $\mathfrak{h}$ . Posto  $m = |c| - d$ , possiamo affermare che lo strato  $H_i$  è parametrizzato dal sottoschema di  $\mathbb{A}^m$  definito dall'ideale

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap k[c \setminus \{c_1, \dots, c_d\}].$$

Se  $\mathfrak{h}_1 = (0)$ , allora  $H_i \simeq \mathbb{A}^m$ . Se invece  $\mathfrak{h}_1 \neq (0)$ , allora

$$\mathfrak{h}_1 = (f_{d+1}, \dots, f_t),$$

dove i polinomi  $f_j$  non hanno parte lineare, cioè il punto  $(0, 0, \dots, 0)$ , corrispondente all'ideale di partenza  $i$ , ha molteplicità  $\geq 2$  in  $k[c \setminus \{c_1, \dots, c_d\}] / \mathfrak{h}_1$ . ■

Nel Capitolo 1 abbiamo visto che fissati i polinomi  $F_1, \dots, F_n$ , il resto della riduzione di un generico elemento  $G$  su questo insieme non è univocamente determinato e dipende dall'ordine con cui vengono scelti gli  $F_j$  durante il processo. Ciò significa che, nel nostro caso, le relazioni ottenute sulle variabili  $c$  non sono uniche. A prima vista si potrebbe pensare che due riduzioni diverse possano dare luogo a due ideali diversi (sebbene i sottoschemi parametrizzati contengano gli stessi punti). Mostriamo ora che in realtà l'ideale è univocamente determinato.

**Teorema 5.18.** *L'ideale che definisce la struttura algebrica dello strato corrispondente all'ideale monomiale  $\mathfrak{i} = \{X^{\gamma_1}, \dots, X^{\gamma_n}\}$  è unico.*

*Dimostrazione.* Presi in considerazione l'insieme polinomi  $\mathcal{B} = \{F_1, \dots, F_n\}$  (come in (5.9)), eseguiamo due riduzioni differenti degli S-polinomi e chiamiamo  $\mathfrak{a}_1$  e  $\mathfrak{a}_2$  gli ideali dello strato ottenuti. Consideriamo ora una base di Gröbner  $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_t\}$  dell'ideale  $\mathfrak{a}_1$ . L'insieme di polinomi  $\mathcal{B} \cup \mathcal{G}$  è una base di Gröbner di un certo ideale di  $k[X_0, \dots, X_r; \dots, c_{i\alpha}, \dots]$ , infatti

- $S(G_i, G_j) \xrightarrow{\mathcal{G}}_+ 0, \forall 0 < i, j \leq t$ , perché  $\mathcal{G}$  è una G-base e  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ ;
- $S(F_i, G_j) \xrightarrow{\{F_i, G_j\}}_+ 0, \forall 0 < i \leq n, 0 < j \leq t$ , perché i leading terms di  $F_i$  e  $G_j$  sono coprimi e  $\{F_i, G_j\} \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ ;
- $S(F_i, F_j) \xrightarrow{\mathcal{B} \cup \mathcal{G}}_+ 0, \forall 0 < i, j \leq n$ , per costruzione.

Per le proprietà delle basi di Gröbner, sappiamo che se il resto di una riduzione su  $\mathcal{B} \cup \mathcal{G}$  di un polinomio è 0, allora è 0 il resto rispetto ad una qualsiasi riduzione. Quindi è 0 anche il resto della riduzione che determinava l'ideale  $\mathfrak{a}_2$ , cioè i generatori di  $\mathfrak{a}_2$  sono contenuti in  $\mathfrak{a}_1$ , ovvero  $\mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_1$ . Per simmetria,  $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ . ■

### 5.2.1 Strategia computazionale

Vediamo ora come tradurre in pratica le potenzialità dei risultati esposti. L'idea è determinare la parte lineare  $L(\mathfrak{a})$  per sapere preliminarmente quanti parametri effettivi devono essere considerati nella costruzione dello strato. Dati i polinomi  $F_1, \dots, F_n$  come in (5.9), generica base di Gröbner riferita all'ideale iniziale  $\mathfrak{i} = (X^{\gamma_1}, \dots, X^{\gamma_n})$ , consideriamo il passo generico di riduzione

$$S(F_i, F_j) - g F_k = S(F_i, F_j) - g X^{\gamma_k} - \sum_{\alpha \in T_{\gamma_k}^i} (g c_{k\alpha}) X^\alpha.$$

$g$  è un polinomio nelle variabili  $c$  in cui ogni monomio ha grado maggiore o uguale a 1, quindi per ogni  $\alpha \in T_{\gamma_k}^i$ ,  $g c_{k\alpha}$  è un polinomio in cui ogni monomio è di grado maggiore o uguale a 2. Pertanto per determinare la parte lineare  $L(\mathfrak{a})$  è sufficiente considerare la riduzione degli S-polinomi sui termini di testa dei polinomi  $F_1, \dots, F_n$ .

**Algoritmo per la costruzione dello strato.** Consideriamo l'ideale monomiale  $\mathfrak{i} = (X^{\gamma_1}, \dots, X^{\gamma_n}) \subseteq k[X_0, \dots, X_r]$  e il term order  $\preceq$ .

**Step 1** Costruisco i polinomi  $F_1, \dots, F_n$  sommando ad ogni elemento  $X^{\gamma_j}$  una combinazione lineare dei polinomi appartenenti a  $T_{\gamma_j}^i$ .

**Step 2** Calcolo gli  $S$ -polinomi  $S(F_i, F_j), \forall i > j$ , e li riduco sulla base  $\{X_{\gamma_1}, \dots, X_{\gamma_n}\}$  ottenendo i polinomi  $\widehat{S}_{ij}$ . Interpreto gli  $\widehat{S}_{ij}$  come polinomi nelle variabili  $X$ : i coefficienti dei monomi degli  $\widehat{S}_{ij}$  sono polinomi di grado 1 nelle variabili  $c$  che generano  $L(\mathfrak{a})$ .

**Step 3** Calcolo una base di Gröbner ridotta di  $L(\mathfrak{a})$ . I leading terms di questa base  $c_1, \dots, c_s$  formano un insieme di variabili eliminabili.

**Step 4** Riduco gli  $S$ -polinomi sulla base di Gröbner  $\{F_1, \dots, F_n\}$  rispetto ad un elimination order su  $\mathbb{T}_{X,c}$  delle variabili  $X$ , dato dal term order  $\preceq$ , ottenendo i polinomi  $S_{ij}$ . Interpreto gli  $S_{ij}$  come polinomi nelle variabili  $X$ : i coefficienti dei monomi degli  $S_{ij}$  sono polinomi nelle variabili  $c$  che generano l'ideale  $\mathfrak{a}$ .

**Step 5** Tra questi polinomi, per ogni  $h = 1, \dots, s$  c'è un polinomio  $f_h$  con parte lineare uguale all'elemento della base di Gröbner di  $L(\mathfrak{a})$  con leading term  $c_h$ . Uso questi polinomi per eliminare le variabili  $c_1, \dots, c_s$  e ottengo l'ideale  $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \cap k[c \setminus \{c_1, \dots, c_s\}]$  che parametrizza lo strato  $H_i$ .

**Esempio 5.19.** Applichiamo l'algoritmo al caso risolto nell'Esempio 5.13, con l'ausilio di `Macaulay`. Abbiamo fissati l'ordinamento `RevLex` su  $k[X_0, X_1, X_2]$  e l'ideale monomiale

$$\mathfrak{i} = (X_0^2, X_0X_2).$$

```
i1 : A = QQ[X_0..X_2, c_1..c_6, MonomialOrder => {3, 6}];
i2 : i = ideal(X_0^2, X_0*X_2);
o2 : Ideal of A
```

**Step 1.** Costruisco la generica coppia

```
i3 : F_1 = X_0^2 + c_1*X_0*X_1 + c_2*X_1^2 + c_3*X_1*X_2
      + c_4*X_2^2;
i4 : F_2 = X_0*X_2 + c_5*X_1*X_2 + c_6*X_2^2;
```

**Step 2.** Calcolo l' $S$ -polinomio e lo riduco sulla base di  $\mathfrak{i}$ :

```
i5 : S_12 = X_2*F_1 - X_0*F_2
o5 = X X X c  - X X X c  + X X c  - X X c  + X X c
      0 1 2 1    0 1 2 5    1 2 2    0 2 6    1 2 3
-----
      3
+ X c
      2 4
```

---

5. Stratificazione dello schema di Hilbert

---

```

o5 : A
i6 : Ls_12 = S_12 % i
      2      2      3
o6 = X X c + X X c + X c
      1 2 2   1 2 3   2 4
o6 : A

```

**Step 3.**  $L(\mathbf{a}) = \langle c_2, c_3, c_4 \rangle$ , quindi  $c_2, c_3, c_4$  sono variabili eliminabili.

**Step 4.** Riduco  $S_{12}$  sulla base  $\{F_1, F_2\}$ :

```

i7 : s_12 = (S_12 % F_1) % F_2
      2      2 2      2      2
o7 = - X X c c + X X c + X X c - X X c c + 2X X c c
      1 2 1 5   1 2 5   1 2 2   1 2 1 6   1 2 5 6
-----
      2      3 2      3
+ X X c + X c + X c
  1 2 3   2 6   2 4

```

o7 : A

Quindi  $\mathbf{a} = (c_2 - c_1c_5, c_3 - c_1c_6 + 2c_5c_6, c_4 + c_6^2)$ .

**Step 5.** Ho un generatore per ogni elemento della base di  $L(\mathbf{a})$ , quindi posso eliminare le variabili  $c_2, c_3, c_4$ . Non essendoci altre relazioni, lo strato  $H_i$  è parametrizzato dallo schema affine

$$\mathbb{A}^3 = \text{Spec } k[c_1, c_5, c_6].$$

**Esempio 5.20.** Costruiamo lo strato di  $i = (X_1^2, X_0X_2, X_0X_3, X_2X_3)$  in  $\mathbb{P}^3$  secondo l'ordinamento RevLex.

```

i1 : A = QQ[X_0..X_3, c_1..c_11, MonomialOrder => {4, 11}];
i2 : i = ideal (X_1^2, X_0*X_2, X_0*X_3, X_2*X_3);
o2 : Ideal of A

```

**Step 1.** Costruisco i generici polinomi con i leading terms assegnati:

```

i3 : F_1 = X_1^2 + c_1*X_1*X_2 + c_2*X_2^2 + c_3*X_1*X_3
      + c_4*X_3^2;
i4 : F_2 = X_0*X_2 + c_5*X_1*X_2 + c_6*X_2^2
      + c_7*X_1*X_3 + c_8*X_3^2;
i5 : F_3 = X_0*X_3 + c_9*X_1*X_3 + c_10*X_3^2;
i6 : F_4 = X_2*X_3 + c_11*X_3^2;

```

**Step 2.** Calcolo gli S-polinomi e lo riduco sulla base di  $i$ . Dal momento che  $X_1^2$  è coprimo con gli altri tre leading terms non considero gli S-polinomi che coinvolgono  $F_1$ .

---

### 5. Stratificazione dello schema di Hilbert

---

```

i7 : S_23 = X_3*F_2 - X_2*F_3
              2          2          2
o7 = X X X c - X X X c + X X c + X X c - X X c
      1 2 3 5   1 2 3 9   2 3 6   1 3 7   2 3 10
-----
      3
      + X c
      3 8
o7 : A
i8 : S_24 = X_3*F_2 - X_0*F_4
              2          2          2          3
o8 = X X X c + X X c - X X c + X X c + X c
      1 2 3 5   2 3 6   0 3 11   1 3 7   3 8
o8 : A
i9 : S_34 = X_2*F_3 - X_0*F_4
              2          2
o9 = X X X c - X X c + X X c
      1 2 3 9   0 3 11   2 3 10
o9 : A
i10 : S = matrix{{S_23,S_24,S_34}};
              1          3
o10 : Matrix A <--- A
i11 : Ls = S % i
o11 = | X_1X_3^2c_7+X_3^3c_8 X_1X_3^2c_7+X_3^3c_8 0 |
              1          3
o11 : Matrix A <--- A

```

**Step 3.**  $L(\mathbf{a}) = \langle c_7, c_8 \rangle$ , quindi  $c_7$  e  $c_8$  sono variabili eliminabili.

**Step 4.** Riduco gli  $S$ -polinomi sulla base  $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ :

```

i12 : s = ((S % F_1) % F_2) % F_3 % F_4
o12 = | -X_1X_3^2c_5c_11+X_1X_3^2c_9c_11+X_1X_3^2c_7
-----
      +X_3^3c_6c_11^2+X_3^3c_10c_11+X_3^3c_8
-----
      -X_1X_3^2c_5c_11+X_1X_3^2c_9c_11+X_1X_3^2c_7
-----
      +X_3^3c_6c_11^2+X_3^3c_10c_11+X_3^3c_8 0 |
              1          3
o12 : Matrix A <--- A

```

Quindi  $\mathfrak{a} = (c_7 - c_5c_{11} + c_9c_{11}, c_8 + c_6c_{11} + c_{10}c_{11})$ .

**Step 5.** Ho un generatore di  $\mathfrak{a}$  per ogni elemento della base di  $L(\mathfrak{a})$ , quindi elimino le variabili  $c_7, c_8$  e ottengo di nuovo uno schema affine:

$$H_i \simeq \mathbb{A}^9.$$

### 5.3 Prospettive

Vediamo ora come utilizzare queste nozioni per stratificare lo schema di Hilbert. Fissato un proiettivo  $\mathbb{P}^r$  ed un polinomio numerico  $P(z)$ , sia  $\mathcal{H}ilb_{P(z)}^r$  lo schema di Hilbert corrispondente.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^r \times \mathcal{H}ilb_{P(z)}^r \\ & \searrow f & \downarrow \\ & & \mathcal{H}ilb_{P(z)}^r \end{array}$$

Consideriamo ora un ideale monomiale  $\mathfrak{i}_0 \subseteq k[X_0, \dots, X_r]$  con polinomio di Hilbert  $\binom{z+r}{r} - P(z)$ ;  $\mathfrak{i}_0$  corrisponde ad un punto dello schema di Hilbert, quindi estendiamo la definizione di strato nel modo seguente:

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{i}_0} &= \{ \mathfrak{i} \subseteq k[X_0, \dots, X_r] \text{ omogeneo} \mid \text{In}_{>}(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}_0 \} = \\ &= \{ \Lambda \in \mathcal{H}ilb_{P(z)}^r \mid \text{In}_{>}(\mathfrak{i}_\Lambda) = \mathfrak{i}_0 \}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

dove con  $\mathfrak{i}_\Lambda$  intendiamo l'ideale corrispondente al sottoschema  $f^{-1}(\Lambda)$  di  $\mathbb{P}^r$ .

Nella dimostrazione del Teorema 4.23 di esistenza, abbiamo visto che lo schema di Hilbert è un chiuso di una opportuna grassmaniana, cercheremo quindi di trasferire la struttura dello strato sulla grassmaniana.

#### 5.3.1 La riduzione di matrici

La prima osservazione è che la riduzione degli  $S$ -polinomi nel caso omogeneo può essere reinterpretata come riduzione di matrici. Illustriamo la tecnica con un esempio. Riconsideriamo i polinomi dell'Esempio 5.13

$$\begin{aligned} F_1 &= X_0^2 + c_1 X_0 X_1 + c_2 X_1^2 + c_3 X_1 X_2 + c_4 X_2^2 \\ F_2 &= X_0 X_2 + c_5 X_1 X_2 + c_6 X_2^2. \end{aligned}$$

$S(F_1, F_2)$  è un polinomio omogeneo di grado 3, pertanto verrà ridotto da polinomi di grado 3, generati a partire da  $F_1$  e  $F_2$ . Costruiamo una matrice con  $\binom{3+2}{2}$  colonne, che corrispondono ai possibili monomi di grado 3 in  $k[X_0, X_1, X_2]$  (ordinati secondo il term order scelto), e 6 righe, che corrispondono a una base dei possibili polinomi di grado 3, costruibili da  $F_1$  e  $F_2$ :  $X_0 F_1, X_1 F_1, X_2 F_1, X_0 F_2, X_1 F_2, X_2 F_2$ . Concretamente



5. Stratificazione dello schema di Hilbert

$X_0^3$	$X_0^2X_1$	$X_0X_1^2$	$X_1^3$	$X_0^2X_2$	$X_0X_1X_2$	$X_1^2X_2$	$X_0X_2^2$	$X_1X_2^2$	$X_2^3$
1	$c_1$	$c_2$	0	0	$c_3$	0	$c_4$	0	0
0	1	$c_1$	$c_2$	0	0	$c_3$	0	$c_4$	0
0	0	0	0	1	$c_1$	$c_2$	0	$c_3$	$c_4$
0	0	0	0	1	$c_5$	0	$c_6$	0	0
0	0	0	0	0	1	$c_5$	0	$c_6$	0
0	0	0	0	0	0	0	1	$c_5$	$c_6$

Nella colonna del monomio  $X_0^2X_2$  incontriamo 2 volte il coefficiente 1, rispettivamente nelle righe  $X_2F_1$  e  $X_0F_2$ .  $X_2$  e  $X_0$  sono proprio i monomi per cui moltiplichiamo  $F_1$  e  $F_2$  nella costruzione dell'S-polinomio  $S(F_1, F_2)$ . Dal punto di vista delle matrici quindi l'S-polinomio corrisponde alla differenza delle due righe. Inoltre supponendo di voler costruire una base di Gröbner ridotta, uno dei due polinomi è superfluo, quindi sostituiamo alla riga  $X_0F_2$  l'S-polinomio  $X_2F_1 - X_0F_2$ ,

$X_0^3$	$X_0^2X_1$	$X_0X_1^2$	$X_1^3$	$X_0^2X_2$	$X_0X_1X_2$	$X_1^2X_2$	$X_0X_2^2$	$X_1X_2^2$	$X_2^3$
1	$c_1$	$c_2$	0	0	$c_3$	0	$c_4$	0	0
0	1	$c_1$	$c_2$	0	0	$c_3$	0	$c_4$	0
0	0	0	0	1	$c_1$	$c_2$	0	$c_3$	$c_4$
0	0	0	0	0	$c_1 - c_5$	$c_2$	$-c_6$	$c_3$	$c_4$
0	0	0	0	0	1	$c_5$	0	$c_6$	0
0	0	0	0	0	0	0	1	$c_5$	$c_6$

Sempre ipotizzando che  $F_1, F_2$  sia una base di Gröbner, l'S-polinomio deve ridursi a 0 sulla coppia  $F_1, F_2$  e trattandosi di un polinomio di grado 3, tutti i polinomi candidati alla riduzione sono presenti nella matrice. È chiaro che ogni riduzione di polinomi definisce un'operazione di riduzione per righe della matrice e viceversa. Per ridurre la quarta riga della matrice faccio le seguenti operazioni

$$R_4 \leftarrow R_4 - (c_1 - c_5)R_5$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + c_6R_6$$

ottenendo

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ c_2 - c_1c_5 + c_5^2 \ 0 \ c_3 - c_1c_6 + 2c_5c_6 \ c_4 + c_6^2.$$

che dal punto di vista polinomiale, risultano essere

$$S(F_1, F_2) - (c_1 - c_5)X_1F_2 + c_6X_2F_2 =$$

$$(c_2 - c_1c_5 + c_5^2)X_1^2X_2 + (c_3 - c_1c_6 + 2c_5c_6)X_1X_2^2 + (c_4 + c_6^2)X_2^3.$$

cioè una riduzione possibile dell'S-polinomio

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{+ \{F_1, F_2\}} (c_2 - c_1c_5 + c_5^2)X_1^2X_2 + (c_3 - c_1c_6 + 2c_5c_6)X_1X_2^2 + (c_4 + c_6^2)X_2^3.$$

È chiaro quindi che in questo caso, imporre che  $\{F_1, F_2\}$  sia una base di Gröbner è equivalente ad imporre che la matrice corrispondente ai polinomi di grado 3 generati da  $F_1$  e  $F_2$  abbia rango 5.

Osserviamo che è possibile applicare questa tecnica in qualsiasi grado maggiore o uguale a 3. In grado 4 però si avrebbero tre colonne con due termini di valore 1, per la precisione le colonne  $X_0 \cdot X_0^2 X_2$ ,  $X_1 \cdot X_0^2 X_2$  e  $X_2 \cdot X_0^2 X_2$ . Sostituendo nei tre casi ad una delle due righe la differenza delle due troviamo l'S-polinomio  $S(F_1, F_2)$  moltiplicato per  $X_0$ ,  $X_1$  e  $X_2$ . Possiamo procedere alla riduzione di queste righe a partire dalla riduzione dell'S-polinomio moltiplicata per la variabile opportuna. È chiaro che imporre che una di queste righe sia nulla (cioè che i coefficienti di una riduzione valgano 0) significa imporre che tutte e tre le righe siano nulle.

Generalizziamo ora il procedimento al caso generico. Sia  $\{F_1, \dots, F_n\}$  un insieme di polinomi come in (5.9). Dobbiamo scegliere un grado in cui si trovino tutti gli S-polinomi (o multipli), quindi consideriamo

$$d = \max_{i>j} \{ \deg S(F_i, F_j) \}. \quad (5.16)$$

A questo punto, supponendo che gli  $F_i$  siano ordinati secondo i leading terms, costruiamo la matrice composta da  $(r+1)n$  righe e  $\binom{d+r}{r}$  colonne

$$\begin{array}{c|cccc} & X_0^d & \dots & X^\gamma & \dots & X_r^d \\ \hline X_0 F_1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ X_j F_k & & & \dots & & \\ \vdots & & & & & \\ X_r F_n & & & & & \end{array}$$

Procedendo ora da sinistra a destra nella matrice, supponiamo di incontrare nella colonna  $X^\gamma$ ,  $|\gamma| = d$ , più di un coefficiente che vale 1, in corrispondenza delle righe  $R_1, R_2, \dots, R_t$ . Queste righe corrispondono a polinomi della base differenti, quindi possiamo supporre che la riga  $R_i$  rappresenti un multiplo del polinomio  $F_{j_i}$ . Applichiamo alla matrice  $\forall i = 2, \dots, t$  la sostituzione

$$R_i \leftarrow R_1 - R_i,$$

cioè alla riga  $i$  sostituiamo un multiplo dell'S-polinomio  $S(F_{j_1}, F_{j_i})$ . Apparentemente così facendo, perderemmo le informazioni riguardanti la riduzione degli S-polinomi  $S(F_{j_i}, F_{j_h})$  con  $i, h > 1$ , ma non è così in quanto dati i due S-polinomi

$$S(F_{j_1}, F_{j_i}) = X^\alpha F_{j_1} - X^\beta F_{j_i} \quad \text{e} \quad S(F_{j_1}, F_{j_h}) = X^\alpha F_{j_1} - X^\delta F_{j_h}$$

si ha

$$\begin{aligned} S(F_{j_i}, F_{j_h}) &= X^\beta F_{j_i} - X^\delta F_{j_h} = X^\alpha F_{j_i} - S(F_{j_i}, F_{j_i}) - X^\alpha F_{j_h} + S(F_{j_h}, F_{j_h}) = \\ &= S(F_{j_i}, F_{j_h}) - S(F_{j_i}, F_{j_i}) \end{aligned}$$

quindi se  $S(F_{j_i}, F_{j_i})$  e  $S(F_{j_h}, F_{j_h})$  vengono ridotti a 0 anche  $S(F_{j_i}, F_{j_h})$  è ridotto a 0.

Terminato questo procedimento, il numero delle righe, con un coefficiente che vale 1, dà il rango della matrice e le righe rimanenti sono quelle da ridurre a zero. Non tutte queste righe sono significative: infatti se l' $S$ -polinomio  $S(F_i, F_j)$  ha grado  $s < d$ , esso si ripete nella matrice, moltiplicato per un certo monomio,  $\binom{d-s+r}{r}$  volte, perché sono  $\binom{d-s+r}{r}$  i polinomi di grado  $d-s$  in  $r+1$  variabili. Possiamo escludere a priori anche le righe corrispondenti a  $S$ -polinomi di coppie di elementi  $F_i, F_j$  con leading terms coprimi, infatti sappiamo che se  $(LT(F_i), LT(F_j)) = 1$  la riduzione del polinomio  $S(F_i, F_j)$  è sempre 0. Pertanto tralasciamo le righe superflue e ci limitiamo a ridurre al più  $\binom{n}{2}$  righe (una per ogni  $S$ -polinomio). Al termine della riduzione della matrice i coefficienti rimanenti rappresentano i generatori dell'ideale  $\mathfrak{a}$  che definisce la struttura algebrica dello strato.

*Osservazione 5.21.* La ricerca del grado  $d$  secondo la (5.16) in alcuni casi risulta non essere ottimale: se gli unici  $S$ -polinomi di grado  $d$  corrispondono a coppie di elementi  $F_i, F_j$  con leading terms coprimi, possiamo ottenere le medesime condizioni anche in un grado più basso perché la riduzione del polinomio  $S(F_i, F_j)$  è 0 indipendentemente dai coefficienti  $c$ . Ottimizziamo quindi il grado  $d$ :

$$d = \max_{i>j} \left\{ \deg S(F_i, F_j) \mid (LT(F_i), LT(F_j)) \neq 1 \right\}. \quad (5.17)$$

### 5.3.2 Un algoritmo per la stratificazione

Fissiamo lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^r$ , con il term order  $\preceq$  su  $k[X_0, \dots, X_r]$ , e scegliamo un polinomio numerico  $P(z)$ . Siamo ora in grado di scrivere un algoritmo per costruire la stratificazione dello schema di Hilbert  $\mathcal{H}ilb_{P(z)}^r$ , indotta da  $\preceq$ .

**Step 1.** Calcoliamo la regolarità  $m_0$  di un qualsiasi sottoschema  $X$  di  $\mathbb{P}^r$ , con polinomio di Hilbert  $P(z)$ , mediante i  $\mathfrak{b}$ -polinomi, secondo il Corollario 4.13, come fatto nella dimostrazione del teorema di esistenza dello schema di Hilbert.

**Step 2.** Consideriamo lo spazio vettoriale  $V$  formato dai polinomi di grado  $m_0$  in  $k[X_0, \dots, X_r]$  e calcoliamo tutti i possibili ideali monomiali  $\mathfrak{a}_j$  con polinomio di Hilbert  $\binom{z+m_0}{r} - P(z)$ , generati da  $\binom{m_0+r}{r} - P(m_0)$  polinomi di  $V$ .

**Step 3.** Per ogni ideale  $i_j$ , calcoliamo il grado  $d_j$  in cui è possibile calcolare tutti gli  $S$ -polinomi (eventualmente multipli) mediante (5.17) e poniamo

$$D = \max_j \{d_j\}.$$

Considereremo lo schema di Hilbert  $\mathcal{H}ilb_{P(z)}^r$  come chiuso della grassmanniana  $G\left(\binom{D+r}{r} - P(D), \binom{D+r}{r}\right)$ .

**Step 4.** Per ogni ideale  $i_j$ , costruiamo lo strato corrispondente  $H_{i_j}$  mediante la riduzione della matrice  $M_j$  o l'equivalente riduzione polinomiale. Generato l'ideale  $a_j$  delle relazioni tra i coefficienti, eliminiamo le variabili eliminabili.

**Step 5.** A questo punto ogni matrice  $M_j$ , con  $\binom{D+r}{r}$  colonne e  $\binom{D+r}{r} - P(D)$  righe, ha rango massimo quindi definisce un punto della grassmanniana e contemporaneamente un punto dello schema di Hilbert. Per definire i morfismi dallo strato  $i_j$  alla grassmanniana, applichiamo alle colonne con una entrata di valore 1 la riduzione di Gauss-Jordan. Al termine di questa riduzione, la restrizione della matrice  $M_j$  a queste colonne è la matrice identità e i coefficienti presenti sulle rimanenti

$$\left(\binom{D+r}{r} - P(D)\right) \cdot P(D)$$

entrate danno il morfismo razionale, per identificare lo strato  $H_j$  con un sottoschema dell'opportuno aperto affine di  $G\left(\binom{D+r}{r} - P(D), \binom{D+r}{r}\right)$ .

### 5.3.3 La stratificazione dello schema di Hilbert $\mathcal{H}ilb_{z+2}^2$

Come esempio conclusivo, costruiamo la stratificazione dello schema di Hilbert  $\mathcal{H}ilb_{z+2}^2$  indotta dall'ordinamento monomiale RevLex, applicando l'algoritmo proposto.

**Step 1** Scriviamo innanzitutto il polinomio  $z + 2$  come somma di binomiali:

$$z + 2 = a_0 \binom{z+0}{0} + a_1 \binom{z+1}{1} = a_1 z + a_0 + a_1 \implies a_1 = 1, a_0 = 1,$$

quindi il polinomio di Hilbert di un ideale che definisce un tale sottoschema è

$$\binom{z+2}{2} - (z+2) = \binom{z+2}{2} - \binom{z+1}{1} - \binom{z+0}{0}.$$

Per il Corollario 4.13, la regolarità di un qualsiasi sottoschema con questo polinomio di Hilbert è

$$m_0 = P_2(1, 1, -1) = 2.$$

**Step 2**  $\binom{2+2}{2} - 2 - 2 = 2$ , quindi cerchiamo le coppie di polinomi di grado 2 in  $k[X_0, X_1, X_2]$  con polinomio di Hilbert  $\binom{z+2}{2} - z - 2$ . Si ottengono 9 possibilità:

1.  $(X_0^2, X_0X_1)$ ,    4.  $(X_0X_1, X_0X_2)$ ,    7.  $(X_0X_2, X_1X_2)$ ,
2.  $(X_0^2, X_0X_2)$ ,    5.  $(X_0X_1, X_1X_2)$ ,    8.  $(X_0X_2, X_2^2)$ ,
3.  $(X_0X_1, X_1^2)$ ,    6.  $(X_1^2, X_1X_2)$ ,    9.  $(X_1X_2, X_2^2)$ .

**Step 3** Ogni coppia di elementi ha  $S$ -polinomio di grado 3, quindi consideriamo lo schema di Hilbert come chiuso della grassmanniana

$$G\left(\binom{3+2}{2} - 5, \binom{3+2}{2}\right) = G(5, 10).$$

**Step 4** Costruiamo ora la struttura algebrica dei nove strati seguendo le seguenti operazioni:

1. costruzione della coppia generica di elementi con leading terms assegnati;
2. calcolo della riduzione dell' $S$ -polinomio sull'ideale monomiale per determinare le variabili eliminabili;
3. riduzione dell' $S$ -polinomio sulla coppia di elementi e costruzione dell'ideale dei parametri;
4. eliminazione delle variabili e esplicitazione della struttura algebrica dello strato.

1.  $i_1 = (X_0^2, X_0X_1)$

$$F_1 = X_0^2 + c_1X_1^2 + c_2X_0X_2 + c_3X_1X_2 + c_4X_2^2$$

$$F_2 = X_0X_1 + c_5X_1^2 + c_6X_0X_2 + c_7X_1X_2 + c_8X_2^2$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{i_1} c_1X_1^3 + c_3X_1^2X_2 - c_8X_0X_2^2 + c_4X_1X_2^2$$

$L(\mathfrak{a}_1) = \langle c_1, c_3, c_8, c_4 \rangle \Rightarrow$  Parametri eliminabili:  $c_1, c_3, c_4, c_8$ .

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{F_1, F_2} (c_1 + c_5^2)X_1^3 + (c_3 + c_1c_6 - c_2c_5 + 2c_5c_7 - c_5^2c_6)X_1^2X_2 +$$

$$+ (-c_8 + c_6c_7 - c_5c_6^2)X_0X_2^2 +$$

$$+ (c_4 - c_2c_7 + c_3c_6 + c_5c_8 + c_7^2 - c_5c_6c_7)X_1X_2^2 +$$

$$+ (-c_2c_8 + c_4c_6 + c_7c_8 - c_5c_6c_8)X_2^3$$

$$\mathfrak{a}_1 = (c_1 + c_5^2, c_3 + c_1c_6 - c_2c_5 + 2c_5c_7 - c_5^2c_6, -c_8 + c_6c_7 - c_5c_6^2, c_4 - c_2c_7 + c_3c_6 + c_5c_8 + c_7^2 - c_5c_6c_7, -c_2c_8 + c_4c_6 + c_7c_8 - c_5c_6c_8)$$

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{a}_1 \cap k[c_2, c_5, c_6, c_7] = (0)$$

$$H_1 \simeq \mathbb{A}^4 = \text{Spec } k[c_2, c_5, c_6, c_7] \tag{5.18}$$

2.  $i_2 = (X_0^2, X_0X_2)$

$$F_1 = X_0^2 + c_1X_0X_1 + c_2X_1^2 + c_3X_1X_2 + c_4X_2^2$$

$$F_2 = X_0X_2 + c_5X_1X_2 + c_6X_2^2$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{i_2} c_2X_1^2X_2 + c_3X_1X_2^2 + c_4X_2^3$$

$$L(\mathfrak{a}_2) = \langle c_2, c_3, c_4 \rangle \Rightarrow \text{Parametri eliminabili: } c_2, c_3, c_4.$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{F_1, F_2} (c_2 - c_1c_5 + c_5^2)X_1^2X_2 + (c_3 - c_1c_6 + 2c_5c_6)X_1X_2^2 + (c_4 + c_6^2)X_2^3.$$

$$\mathfrak{a}_2 = (c_2 - c_1c_5 + c_5^2, c_3 - c_1c_6 + 2c_5c_6, c_4 + c_6^2)$$

$$\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{a}_2 \cap k[c_1, c_5, c_6] = (0)$$

$$H_2 \simeq \mathbb{A}^3 = \text{Spec } k[c_1, c_5, c_6] \quad (5.19)$$

3.  $i_3 = (X_0X_1, X_1^2)$

$$F_1 = X_0X_1 + c_1X_0X_2 + c_2X_1X_2 + c_3X_2^2$$

$$F_2 = X_1^2 + c_4X_0X_2 + c_5X_1X_2 + c_6X_2^2$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{i_3} -c_4X_0^2X_2 - c_6X_0X_2^2 + c_3X_1X_2^2$$

$$L(\mathfrak{a}_3) = \langle c_4, c_6, c_3 \rangle \Rightarrow \text{Parametri eliminabili: } c_3, c_4, c_6.$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{F_1, F_2} -c_4X_0^2X_2 + (-c_6 - c_1^2 - c_2c_4 + c_1c_5)X_0X_2^2 + (c_3 - c_1c_2)X_1X_2^2 + (-c_1c_3 + c_3c_5 - c_2c_6)X_2^3$$

$$\mathfrak{a}_3 = (-c_4, -c_6 - c_1^2 - c_2c_4 + c_1c_5, c_3 - c_1c_2, -c_1c_3 + c_3c_5 - c_2c_6)$$

$$\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{a}_3 \cap k[c_1, c_2, c_5] = (0)$$

$$H_3 \simeq \mathbb{A}^3 = \text{Spec } k[c_1, c_2, c_5] \quad (5.20)$$

4.  $i_4 = (X_0X_1, X_0X_2)$

$$F_1 = X_0X_1 + c_1X_1^2 + c_2X_1X_2 + c_3X_2^2$$

$$F_2 = X_0X_2 + c_4X_1X_2 + c_5X_2^2$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{i_4} (c_1 - c_4)X_1^2X_2 + (c_2 - c_5)X_1X_2^2 + c_3X_2^3$$

$$L(\mathfrak{a}_4) = \langle c_1 - c_4, c_2 - c_5, c_3 \rangle \Rightarrow \text{Parametri eliminabili: } c_1, c_2, c_3.$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{F_1, F_2} (c_1 - c_4)X_1^2X_2 + (c_2 - c_5)X_1X_2^2 + c_3X_2^3$$

$$\mathfrak{a}_4 = L(\mathfrak{a}_4)$$

$$\mathfrak{h}_4 = \mathfrak{a}_4 \cap k[c_4, c_5] = (0)$$

$$H_4 \simeq \mathbb{A}^2 = \text{Spec } k[c_4, c_5] \quad (5.21)$$


---

$$5. \mathfrak{i}_5 = (X_0X_1, X_1X_2)$$

$$F_1 = X_0X_1 + c_1X_1^2 + c_2X_0X_2 + c_3X_2^2$$

$$F_2 = X_1X_2 + c_4X_2^2$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{i_5}_+ (c_2 - c_4)X_0X_2^2 + c_3X_2^3$$

$$L(\mathfrak{a}_5) = \langle c_2 - c_4, c_3 \rangle \Rightarrow \text{Parametri eliminabili: } c_2, c_3.$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{F_1, F_2}_+ (c_2 - c_4)X_0X_2^2 + (c_3 + c_1c_4^2)X_2^3,$$

$$\mathfrak{a}_5 = (c_2 - c_4, c_3 + c_1c_4^2).$$

$$\mathfrak{h}_5 = \mathfrak{a}_5 \cap k[c_1, c_4] = (0)$$

$$H_5 \simeq \mathbb{A}^2 = \text{Spec } k[c_1, c_4] \quad (5.22)$$

$$6. \mathfrak{i}_6 = (X_1^2, X_1X_2)$$

$$F_1 = X_1^2 + c_1X_0X_2 + c_2X_2^2$$

$$F_2 = X_1X_2 + c_3X_2^2$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{i_6}_+ c_1X_0X_2^2 + c_2X_2^3$$

$$L(\mathfrak{a}_6) = \langle c_1, c_2 \rangle \Rightarrow \text{Parametri eliminabili: } c_1, c_2.$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{F_1, F_2}_+ c_1X_0X_2^2 + (c_2 + c_3^2)X_2^3$$

$$\mathfrak{a}_6 = (c_1, c_2 + c_3^2)$$

$$\mathfrak{h}_6 = \mathfrak{a}_6 \cap k[c_3] = (0)$$

$$H_6 \simeq \mathbb{A}^1 = \text{Spec } k[c_3] \quad (5.23)$$

$$7. \mathfrak{i}_7 = (X_0X_2, X_1X_2)$$

$$F_1 = X_0X_2 + c_1X_2^2$$

$$F_2 = X_1X_2 + c_2X_2^2$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{i_7}_+ 0$$

$$L(\mathfrak{a}_7) = \langle 0 \rangle \Rightarrow \text{Nessun parametro eliminabile.}$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{F_1, F_2}_+ 0$$

$$\mathfrak{a}_7 = (0)$$

$$H_7 \simeq \mathbb{A}^2 = \text{Spec } k[c_1, c_2] \quad (5.24)$$


---

$$8. \mathfrak{a}_8 = (X_0X_2, X_2^2)$$

$$F_1 = X_0X_2 + c_1X_1X_2$$

$$F_2 = X_2^2$$

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{\text{is}}_+ 0$$

$L(\mathfrak{a}_8) = \langle 0 \rangle \Rightarrow$  Nessun parametro eliminabile.

$$S(F_1, F_2) \xrightarrow{F_1, F_2}_+ 0$$

$$\mathfrak{a}_8 = (0)$$

$$H_8 \simeq \mathbb{A}^1 = \text{Spec } k[c_1]. \quad (5.25)$$

9.  $(X_1X_2, X_2^2)$  Non è possibile attaccare polinomi di coda a questa coppia pertanto lo strato  $H_9$  è formato da un solo punto:

$$H_9 \simeq \mathbb{A}^0 = \text{Spec } k. \quad (5.26)$$

**Step 5** Infine costruiamo i morfismi di identificazione degli strati nella grassmanniana  $G(5, 10)$ . Per ogni strato, riportiamo la matrice iniziale con le 6 righe generate dai polinomi  $F_1$  e  $F_2$  in grado 3, di cui una corrispondente all' $S$ -polinomio, e la matrice composta da 5 righe che, dopo le opportune sostituzioni, definisce un punto di un aperto affine della grassmanniana.

$$1. H_1 \simeq \mathbb{A}^4$$

$$S(F_1, F_2) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & c_1 & 0 & c_2 & c_3 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c_1 & 0 & c_2 & c_3 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & -c_5 & c_1 & -c_6 & c_2 - c_7 & c_3 & -c_8 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_5 & 0 & c_6 & c_7 & 0 & c_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_1 : H_1 \rightarrow \mathbb{A}_{\{1,2,3,6,7\}}^{25}$$

$$(c_2, c_5, c_6, c_7) \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & c_5^3 & -3c_5^3c_6 + 3c_5^2c_7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c_5^2 & 2c_5^2c_6 - 2c_5c_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_5 & -c_5c_6 + c_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



---

5. Stratificazione dello schema di Hilbert

---

$$\begin{array}{l}
-4c_5^2c_6^2 - 2c_2c_5c_6 + 4c_5c_6c_7 - c_2^2 + c_2c_7 - c_7^2 \\
\quad -c_2c_6 \\
\quad -c_6^2 \\
\quad c_2 \\
\quad c_6 \\
-c_5^3c_6^2 - 2c_2c_5^2c_6 - 2c_5^2c_6c_7 - c_2^2c_5 + c_2c_5c_7 + 2c_5c_7^2 \\
\quad -c_5^2c_6^2 - c_2c_5c_6 + 2c_5c_6c_7 - c_7^2 \\
\quad -c_5c_6^2 \\
\quad 2c_5^2c_6 + c_2c_5 - 2c_5c_7 \\
\quad c_7 \\
3c_5^3c_6^3 + 2c_2c_5^2c_6^2 - 5c_5^2c_6^2c_7 + c_2^2c_5c_6 - 3c_2c_5c_6c_7 + 2c_5c_6c_7^2 - c_2^2c_7 + c_2c_7^2 \\
\quad c_2c_5c_6^2 - c_2c_6c_7 \\
\quad c_5c_6^3 - c_6^2c_7 \\
-c_5^2c_6^2 - c_2c_5c_6 + 2c_5c_6c_7 + c_2c_7 - c_7^2 \\
\quad -c_5c_6^2 + c_6c_7
\end{array}$$

2.  $H_2 \simeq \mathbb{A}^3$

$$S(F_1, F_2) \rightarrow \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccccc} 1 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 & c_2 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 - c_5 & c_2 & -c_6 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_5 & 0 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_5 & c_6 \end{array} \right| \end{array}$$

$\varphi_2 : H_2 \rightarrow \mathbb{A}_{\{1,2,5,6,8\}}^{25}$

$$(c_1, c_5, c_6) \mapsto \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -c_1^2 + c_1c_5 - c_5^2 & -c_1^2c_5 + c_1c_5^2 & 0 \\ 0 & 1 & c_1 & c_1c_5 - c_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \\ \\ \left| \begin{array}{ccccc} 0 & -c_1^2c_6 + c_1c_5c_6 + 2c_5^2c_6 & 0 & 3c_5c_6^2 & c_6^3 \\ 0 & c_1c_6 - 2c_5c_6 & 0 & -c_6^2 & 0 \\ 0 & -c_5^2 & 0 & -2c_5c_6 & -c_6^2 \\ 1 & c_5 & 0 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_5 & c_6 \end{array} \right| \end{array}$$

3.  $H_3 \simeq \mathbb{A}^3$

$$S(F_1, F_2) \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & c_1 - c_5 & c_2 & -c_6 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_4 & c_5 & 0 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}$$

$\varphi_3 : H_3 \rightarrow \mathbb{A}_{\{2,3,4,6,7\}}^{25}$

$$(c_1, c_2, c_5) \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & -c_2^2 & -c_1c_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1^2 & -c_2c_5 & -c_1^2c_2 - c_1c_2c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1c_5 - c_5^2 & -c_1c_5^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 & c_2 & c_1c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_5 & c_1c_5 \end{vmatrix}$$

4.  $H_4 \simeq \mathbb{A}^2$

$$S(F_1, F_2) \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 & 0 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_4 & 0 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 - c_4 & 0 & c_2 - c_5 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}$$

$\varphi_4 : H_4 \rightarrow \mathbb{A}_{\{2,3,5,6,8\}}^{25}$

$$(c_4, c_5) \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -c_4^2 & 0 & 0 & -2c_4c_5 & 0 & -c_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_4 & 0 & 0 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -c_4^2 & 0 & -2c_4c_5 & -c_5^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_4 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}$$

5.  $H_5 \simeq \mathbb{A}^2$

$$S(F_1, F_2) \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 & c_2 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 - c_4 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_4 \end{vmatrix}$$


---

$$\varphi_5 : H_5 \rightarrow \mathbb{A}_{\{2,3,6,7,9\}}^{25}$$

$$(c_1, c_4) \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -c_1^2 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1^2 c_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & -c_4^2 & 0 & c_1 c_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -c_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_4 \end{vmatrix}$$

6.  $H_6 \simeq \mathbb{A}^1$

$$S(F_1, F_2) \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & -c_3 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_6 : H_6 \rightarrow \mathbb{A}_{\{3,4,6,7,9\}}^{25}$$

$$c_3 \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -c_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_3 \end{vmatrix}$$

7.  $H_7 \simeq \mathbb{A}^2$

$$S(F_1, F_2) \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_7 : H_7 \rightarrow \mathbb{A}_{\{5,6,7,8,9\}}^{25}$$

$$(c_1, c_2) \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -c_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -c_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_2 \end{vmatrix}$$

8.  $H_8 \simeq \mathbb{A}^1$

$$S(F_1, F_2) \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\varphi_8 : H_8 \rightarrow \mathbb{A}_{\{5,6,8,9,10\}}^{25}$

$$c_1 \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -c_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

9.  $H_9 \simeq \text{Speck}$

Il punto  $H_9$  corrisponde all'origine dell'aperto affine  $\mathbb{A}_{\{6,7,8,9,10\}}^{25}$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



# Bibliografia

- [AM] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.
- [BM] Dave Bayer and David Mumford, *What can be computed in algebraic geometry?*, arXiv:alg-geom/9304003 v1 (1993).
- [CLOa] David A. Cox, John Little, and Donal O’Shea, *Ideals, varieties and algorithms*, Springer, 2000.
- [CLOb] ———, *Using algebraic geometry*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 185, Springer, New York, 2005.
- [EH] David Eisenbud and Joe Harris, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 197, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Eis] David Eisenbud, *The geometry of syzygies*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 229, Springer-Verlag, New York, 2005, A second course in commutative algebra and algebraic geometry.
- [Green] M. Green, *Generic Initial Ideals*, Bellaterra, 1996, Lectures given at Summer School on Commutative Algebra.
- [Gross] Emil Grosswald, *Representation of integers as sums of square*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [R&S] Alexandre Grothendieck, *Récoltes et Semailles. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématiciens*, Université des Sciences et Techniques du Languedoc et CNRS, Montpellier, 1986, [www.grothendieckcircle.org](http://www.grothendieckcircle.org).
- [Hart] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Mac] F. L. Macaulay, *Some properties of enumeration of modular forms system*, Proc. London Math. Soc. **26** (1927), 531–555.

- [Mum] David Mumford, *The red book of varieties and schemes*, expanded ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1358, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.
- [NS] R. Notari and M. L. Spreafico, *A stratification of Hilbert schemes by initial ideals and applications*, Manuscripta Math. **101** (2000), no. 4, 429–448.
- [UAG] Miles Reid, *Undergraduate algebraic geometry*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 12, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [UCA] ———, *Undergraduate commutative algebra*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [RT] Margherita Roggero and Lea Terracini, *Ideals with an assigned initial ideal*, manuscriptum, 2008.
- [Sern] Edoardo Sernesi, *Deformations of algebraic schemes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 334, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Shaf1] Igor R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 1*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1994, Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.
- [Shaf2] ———, *Basic algebraic geometry. 2*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1994, Schemes and complex manifolds, Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid.